Ana-1 VÜ-9

Ws 2020/21 29.01.21

1 Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei dreimal differenzierbar mit

$$f(-1) = f(0) = f'(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Dann existiert ein $c \in (-1,1)$ mit $f'''(c) = 3$. Konstruieren sie auch ein Polynom p dieser Art mit $p''' \equiv 3$.

2 Sei $f \in C^2(I)$ und c ein innerer Punkt von I. Zeigen sie:
a. Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$, so ist c eine Minimalstelle von f.
b. Ist c eine Minimalstelle von f, so ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) \geqslant 0$.
c. Dies ist falsch, wenn nur $f'(c) = 0$ und $f''(c) \geqslant 0$ vorausgesetzt wird.

3 Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $f \in C^2(I)$ heiße *konvex*, wenn $f'' \geqslant 0$ auf ganz I. Man zeige:
a. Für alle $a \in I$ gilt

$$f(a+t) \geqslant T_a^1 f(t), \qquad t \in I.$$

Man sagt, f *liegt oberhalb aller seiner Stützgeraden.*
b. Für alle $u, v \in I$ und $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ gilt

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leqslant \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v).$$

c. Für beliebige $u_1, .., u_n \in I$ und $\lambda_1, .., \lambda_n \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + .. + \lambda_n = 1$ gilt

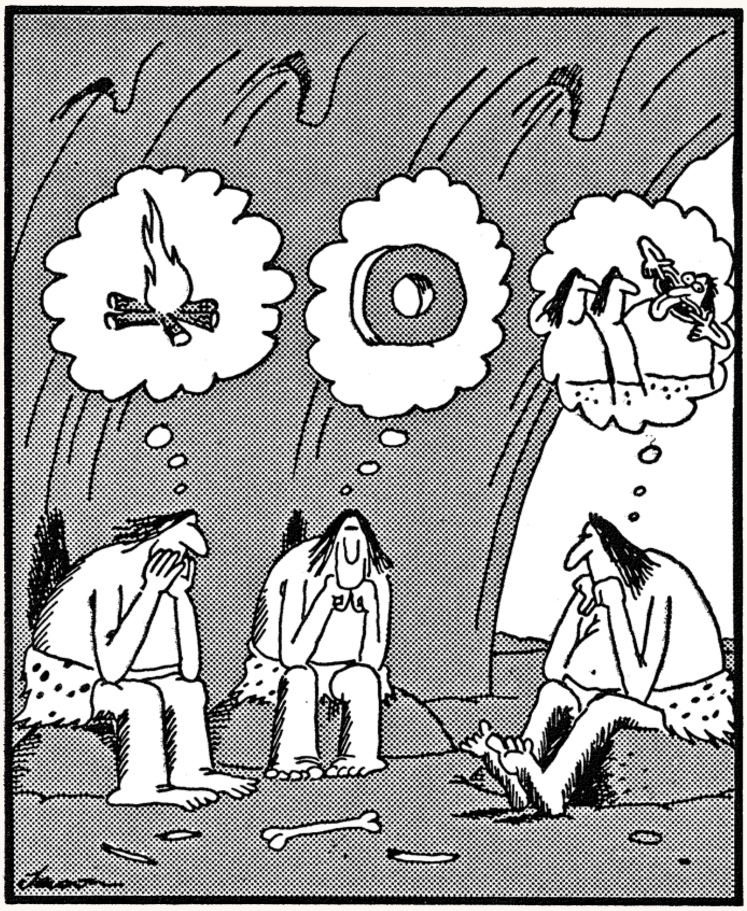
$$f(\lambda_1 u_1 + .. + \lambda_n u_n) \leqslant \lambda_1 f(u_1) + .. + \lambda_n f(u_n).$$

4 *Mit Vorlesung vom Mittwoch* Die differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge der Funktionalgleichung

$$\varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi(v),$$

sei aber nicht identisch 0. Dann gilt:
a. φ hat keine Nullstelle.
b. $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
c. $\varphi'(t) = a\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $a = \varphi'(0)$.
d. $\varphi(t) = \exp(at)$.

5 Man bearbeite die vorangehende Aufgabe nur mit der Annahme, dass φ stetig ist.



Primitive think tanks