1 Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei dreimal differenzierbar mit

$$f(-1) = f(0) = f'(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Dann existiert ein $c \in (-1,1)$ mit $f'''(c) = 3$. Konstruieren sie auch ein Polynom p dieser Art mit $p''' \equiv 3$.

$$p(t) = a(t+1)\cdot t\,(t+d) = a\cdot(t^2+t)(t+d)$$

$$p'(0) = a\cdot 1\cdot d = 0$$

$$\Rightarrow d = 0$$

$$p(t) = a\cdot(t^3+t^2)$$

$$p(1) = a\cdot 2 = 1 \Rightarrow a = \tfrac{1}{2}.$$

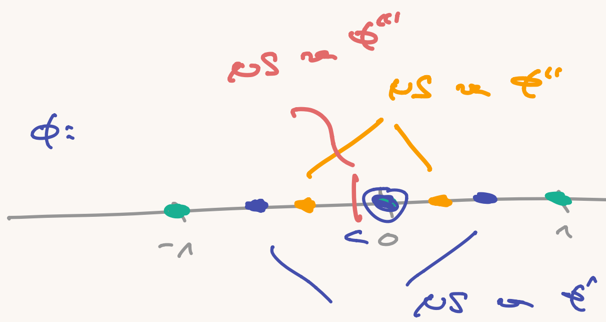
Also: $p(t) = \frac{1}{2}(t^3+t^2)$ $\quad p''' = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 3$

Dann $\phi := f - p$:

$$\boxed{\begin{matrix}\phi(-1) = \phi(0) = \phi(1) = 0\\ \phi'(0) = 0\end{matrix}}$$

$$\phi'''(c) = 0$$
$$\Leftrightarrow f'''(c) = p'''(c) = 3$$

ϕ:



∎

$$\phi'''(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (f-p)'''(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'''(c) = p'''(c) = 3$$

$f'(t) \le -\alpha < 0 \,, \quad t \ge t_0 :$

$$f(t) \le f(t_0) + (-\alpha)(t - t_0)$$

$$\le f(t_0) - \alpha (t - t_0)$$

$\Rightarrow \quad f(t_1) < 0$ für $t_1 \gg t_0$

$\Rightarrow \quad f$ hat eine NS.

2 Sei $f \in C^2(I)$ und c ein innerer Punkt von I. Zeigen sie:

a. Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$, so ist c eine Minimalstelle von f.

b. Ist c eine Minimalstelle von f, so ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) \geqslant 0$.

c. Dies ist falsch, wenn nur $f'(c) = 0$ und $f''(c) \geqslant 0$ vorausgesetzt wird.

a. Sei Umgebung:

$f''(c) > 0$, f'' stetig

$\Rightarrow$ $f''(t) > 0$, $t \in U_\delta(c)$

& $f'(c) = 0$

$\Rightarrow$ $f'(u) < 0 < f'(v)$, $u < c < v$

Also: f ↘ • ↗

b. Zwei Beweise:

Contra: Wenn $\underbrace{f''(c) < 0}$ & $f'(c) = 0$

Dann gilt sogar: c ist strikte Maximalstelle

Bem: Ein Punkt c kann nicht Maximal- und Minimalstelle sein:

Direkt: Da Minimalstelle,

$f(c \pm h) \geq f(c)$, $0 < h < \delta$

$\Leftrightarrow$ $f(c \pm h) - f(c) \geq 0$ $+, -$

$\Longrightarrow$ $f(c+h) - f(c) + f(c-h) - f(c) \geq 0$

$\Rightarrow$ $\dfrac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2} \geq 0$, $0<h<\delta$

$\Rightarrow$ $\lim_{h \to 0} \; - \cdot - \; = f''(c) \geq 0$.

c. Standardbeispiel : t^3

$$f'(t) = 3t^2 \Big|_{t=0} = 0$$

$$f''(t) = 6t \Big|_{t=0} = 0 \quad ?$$

An 0 liegt Sattel Punkt.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \cdot \sin\frac{1}{t} , & t \neq 0 \\ 0 , & t = 0 \end{cases} \quad !$$

ist diffbar, aber f' bei 0 nicht stetig.

$$f'(t) = 2t \cdot \sin\frac{1}{t} + t^2 \cdot \cos\frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

---

3 Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $f \in C^2(I)$ heiße *konvex*, wenn $f'' \geqslant 0$ auf ganz I. Man zeige:

a. Für alle $a \in I$ gilt

$$f(t) \geqslant T_a^1 f(t), \qquad t \in I.$$

Man sagt, f *liegt oberhalb aller seiner Stützgeraden.*

b. Für alle $u, v \in I$ und $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ gilt

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leqslant \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v).$$

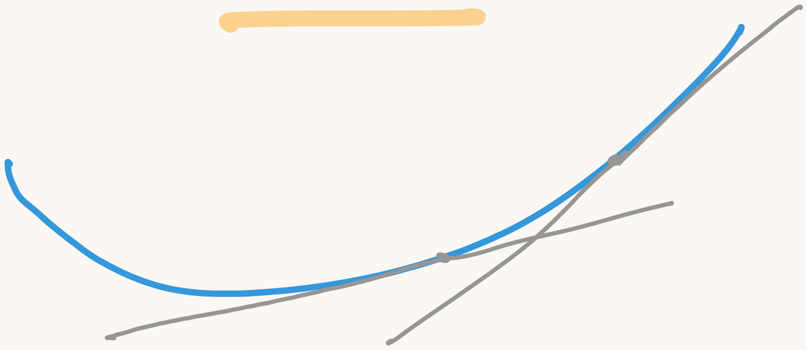
c. Für beliebige $u_1, .., u_n \in I$ und $\lambda_1, .., \lambda_n \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + .. + \lambda_n = 1$ gilt

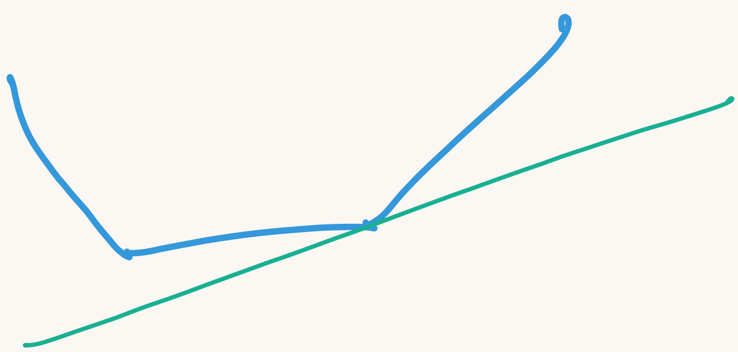
$$f(\lambda_1 u_1 + .. + \lambda_n u_n) \leqslant \lambda_1 f(u_1) + .. + \lambda_n f(u_n).$$

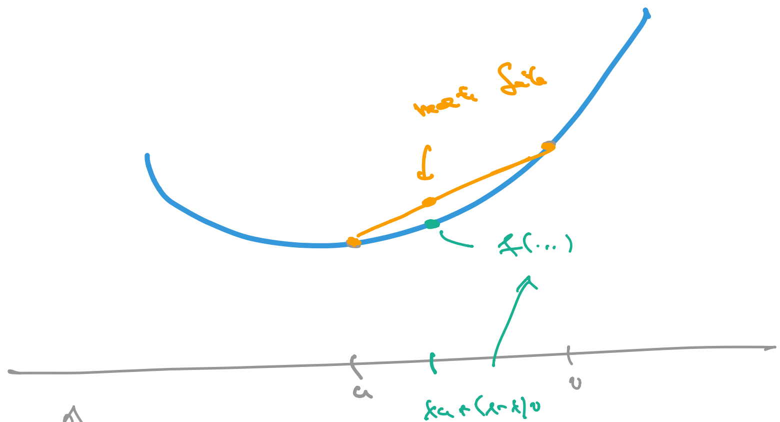
a. $f(a+t) = T_a^1 f(t) + \underline{R_a^1 f(t)}$

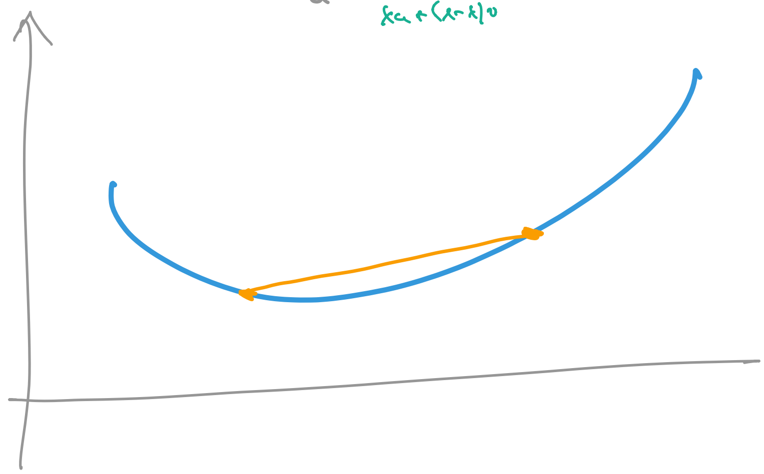
Lagrange: $\underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{f''(a+\vartheta t)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{t^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}$

$\geq T_a^1 f(t).$









Sei $\boxed{w = \lambda u + (1-\lambda) v}$.

Dann:

$$f(u) \geq \underbrace{f(w) + f'(w)(u-w)}_{\text{Stützgerade an } w}$$

$$= f(w) + (1-\lambda) f'(w)(u-v) \quad \Big| \cdot \lambda$$

$$f(v) \geq f(w) + f'(w)(v-w)$$

$$= f(w) + \lambda f'(w)(v-u) \quad \Big| \cdot (1-\lambda)$$

$+$

$$\lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) \geq f(w).$$

$a_1, \dots, a_n \in I$

Konvexkombination:

$$\underbrace{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}: \qquad 0 \le \lambda_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Induktion über n: $\underline{\underline{n = 2}}$: s.o.

Schritt von $n-1$ auf n: $\lambda_n < 1$:

$$w := \frac{\lambda_1}{\underbrace{1-\lambda_n}} a_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{\underbrace{1-\lambda_n}} a_{n-1}$$

Dann: $\underbrace{(1-\lambda_n) w + \lambda_n a_n} = \underline{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}$

Dann gilt:

$$f(\underline{\quad}) = f(\underline{\quad}) \le (1-\lambda_n) \underbrace{f(w)} + \lambda_n f(a_n)$$

$$\underset{\text{I.A.}}{\le} \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(a_{n-1}) + \lambda_n f(a_n).$$

$\square$

4 *Mit Vorlesung vom Mittwoch* Die differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge der Funktionalgleichung

$$\boxed{\varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi(v),}$$

sei aber nicht identisch 0. Dann gilt:

a. $\varphi(0) = 1$.
b. $\varphi(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
c. $\varphi'(t) = a\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $a = \varphi'(0)$.
d. $\varphi(t) = \exp(at)$.

Zuerst: φ hat keine einzige NS: $\varphi(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}$:

Angenommen: $\varphi(a) = 0$.
Dann $\varphi(t) = \varphi(t-a)\cdot\varphi(a) = 0, \; t \in \mathbb{R}$

a. $\varphi(0) = 1$:
$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)\cdot\varphi(0) \quad (\varphi(0) \neq 0$
$\Rightarrow \varphi(0) = 1$.

b. $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \varphi(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R}$.

c. $\varphi'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{\varphi(t+h)}^{\varphi(t)\cdot\varphi(h)} - \varphi(t)}{h} \quad \cdot \varphi(0) = 1$

$= \lim\limits_{h\to 0} \varphi(t)\cdot \dfrac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h}$

$= \varphi(t)\cdot \underbrace{\varphi'(0)}_{a}$

$\varphi'(t) = a\varphi(t)$.

d. $\varphi(t) = \exp(at)$: $\left\{ \begin{array}{l} u' = au, \\ u(0) = 1. \end{array} \right.$

Bsp: $\varphi(x) = \exp(2x)$.

Dann: Einzige Funktion löst Problem

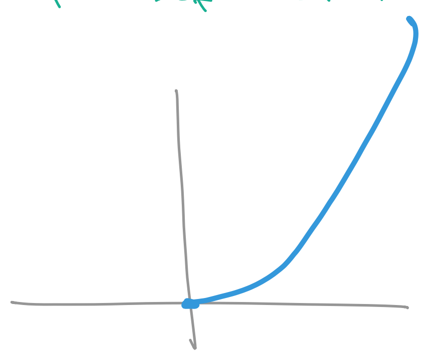
AWP
$$\boxed{\begin{aligned} \varphi' &= 2\varphi, \\ \varphi(0) &= 2. \end{aligned}}$$

jetzt für φ und für exp

$$\underbrace{\exp(2x)}_{\varphi}' = \exp(2x) \cdot (2x)' = 2 \cdot \underbrace{\exp(2x)}_{\varphi}$$

---

x^2 auf $[0, \infty)$



5 Man bearbeite die vorangehende Aufgabe nur mit der Annahme, dass φ stetig ist.

a. und b. wie oben: $\varphi(t) > 0$

Dann: $g(t) = \log \varphi(t)$ wohldefiniert.

Dann

$$g(0) = \log \varphi(0) = 0$$

$$\begin{aligned} g(u+v) &= \log(\varphi(u+v)) \\ &= \log(\varphi(u)\cdot\varphi(v)) \\ &= \log\varphi(u) + \log\varphi(v) \\ &= g(u) + g(v). \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} g(n) &= \underbrace{g(1) + \dots + g(1)}_{n} \\ &= n\cdot g(1). \end{aligned}$$

...

$$g\left(\tfrac{p}{q}\right) = \tfrac{p}{q}\cdot g(1), \quad \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$\Longrightarrow$ Stetigkeit

$$g(t) = at, \quad a = g(1)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \varphi(t) &= \exp(g(t)) \\ &= \exp(at), \quad a = g(1) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

1 Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei dreimal differenzierbar mit

$$f(-1) = f(0) = f'(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Dann existiert ein $c \in (-1,1)$ mit $f'''(c) = 3$. Konstruieren sie auch ein Polynom p dieser Art mit $p''' \equiv 3$.

▹ *Lösung* Mit dem Ansatz $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ erhält man

$$-a + b - c + d = 0, \quad d = 0, \quad a + b + c + d = 1, \quad c = 0.$$

Also ist das gesuchte Polynom

$$p(t) = \frac{1}{2}(t^3 + t^2).$$

Dann ist $\phi = f - p$ eine dreimal differenzierbare Funktion auf $[-1,1]$ mit Nullstellen in -1, 0 und 1 und $\phi'(0) = 0$. Nach dreimaliger Anwendung des Satzes von Rolle auf ϕ, ϕ' und ϕ'' erhalten wir einen Punkt $c \in (-1,1)$ mit

$$\phi'''(c) = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$f'''(c) = p'''(c) = 3.$$ ◃

2 Sei $f \in C^2(I)$ und c ein innerer Punkt von I. Zeigen sie:
a. Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$, so ist c eine Minimalstelle von f.
b. Ist c eine Minimalstelle von f, so ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) \geqslant 0$.
c. Dies ist falsch, wenn nur $f'(c) = 0$ und $f''(c) \geqslant 0$ vorausgesetzt wird.

▹ *Lösung* *a.* Da f'' stetig und c ein innerer Punkt ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$f''(t) > 0, \qquad |t - c| < \delta.$$

Somit ist f' dort strikt wachsend, und mit $f'(c) = 0$ folgt

$$f'(c - h) < 0 < f'(c + h), \qquad 0 < h < \delta.$$

Somit ist f links von strikt fallend und rechts von $[c, c + \delta)$ strikt wachsend. Also ist c eine strikte Minimalstelle.
b. Der erste Teil der Aussage, $f'(c) = 0$, ist der Satz von Fermat. Der zweite Teil folgt indirekt mit (a). Denn wäre $f''(c) < 0$, so wäre analog c eine Maximalstelle – Widerspruch.
Man kann auch direkt argumentieren. Ist c eine Minimalstelle, so ist $f(c \pm h) \geqslant f(c)$ für alle hinreichend kleinen $h \neq 0$, oder

$$f(c \pm h) - f(c) \geqslant 0, \qquad h \neq 0.$$

Addieren der Terme für Plus und Minus ergibt

$$\frac{f(c + h) - 2f(c) + f(c - h)}{h^2} \geqslant 0.$$

Mit Aufgabe ?? folgt daher

$$f''(c) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2} \geqslant 0.$$

c. Gegenbeispiel: Die erste und zweite Ableitung von $t \mapsto t^3$ verschwindet bei 0, aber 0 ist keine Minimalstelle. ◂

3 Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $f \in C^2(I)$ heiße *konvex*, wenn $f'' \geqslant 0$ auf ganz I. Man zeige:

a. Für alle $a \in I$ gilt

$$f(a+t) \geqslant T_a^1 f(t), \qquad t \in I.$$

Man sagt, f *liegt oberhalb aller seiner Stützgeraden.*

b. Für alle $u, v \in I$ und $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ gilt

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leqslant \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v).$$

c. Für beliebige $u_1, .., u_n \in I$ und $\lambda_1, .., \lambda_n \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + .. + \lambda_n = 1$ gilt

$$f(\lambda_1 u_1 + .. + \lambda_n u_n) \leqslant \lambda_1 f(u_1) + .. + \lambda_n f(u_n).$$

▹ *Lösung* *a.* Mit dem Satz von Taylor gilt

$$f(a+t) = T_a^1 f(t) + \frac{1}{2} f''(a + \theta h) t^2$$

Der zweite Summand ist nichtnegativ, also $f(t) \geqslant T_a^1 f(t)$.

b. Sei $w = \lambda u + (1-\lambda)v$. Dann gilt

$$f(u) \geqslant f(w) + f'(w)(u-w) = f(w) + (1-\lambda) f'(w)(u-v)$$

und

$$f(v) \geqslant f(w) + f'(w)(v-w) = f(w) + \lambda f'(w)(v-u).$$

Multiplizieren der ersten Gleichung mit λ, der zweiten mit $1-\lambda$ und Addieren ergibt

$$\lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) \geqslant f(w) = f(\lambda u + (1-\lambda)v).$$

c. Dies folgt mit Induktion. Ist zum Beispiel $\lambda_n < 1$, so setze

$$w \coloneqq \frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} u_1 + .. + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} u_{n-1}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 u_1 + .. + \lambda_n u_n) &= f((1-\lambda_n) w + \lambda_n u_n) \\ &\leqslant (1-\lambda_n) f(w) + \lambda_n f(u_n). \end{aligned}$$

Auf $f(w)$ können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$(1-\lambda_n) f(w) \leqslant \lambda_1 f(u_1) + .. + \lambda_{n-1} f(u_{n-1}).$$

Beides zusammen ergibt die Behauptung. ◂

4 *Mit Vorlesung vom Mittwoch* Die differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge der Funktionalgleichung

$$\varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi(v),$$

sei aber nicht identisch 0. Dann gilt:
a. φ hat keine Nullstelle.
b. $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
c. $\varphi'(t) = a\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $a = \varphi'(0)$.
d. $\varphi(t) = \exp(at)$.

▹ *Lösung* *a.* Gäbe es eine Nullstelle, $\varphi(c) = 0$, so wäre auch

$$\varphi(t) = \varphi(t-c)\varphi(c) = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

und φ wäre identisch Null.
b. Aus $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0)$ und $\varphi(0) \neq 0$ folgt $\varphi(0) = 1$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dann auch $\varphi(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
c. Es ist

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\varphi(t+h) - \varphi(t)) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\varphi(h) - \varphi(0))\varphi(t) = \varphi'(0)\varphi(t).\end{aligned}$$

d. Beide Funktionen lösen dasselbe Anfangswertproblem

$$\psi' = a\psi, \quad \psi(0) = 1.$$

Wegen der Eindeutigkeit dieser Lösung müssen sie gleich sein. ◃

5 Man bearbeite die vorangehende Aufgabe nur mit der Annahme, dass φ stetig ist.

▹ *Lösung* Die ersten beiden Aufgabenteile bleiben gleich. Also ist φ positiv, und damit

$$g : t \mapsto \log \varphi(t)$$

auf $\mathbb{R}$ wohldefiniert. Es gilt dann, wie im Beweis zur e-Funktion,

$$g(n) = ng(1), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

und weiter

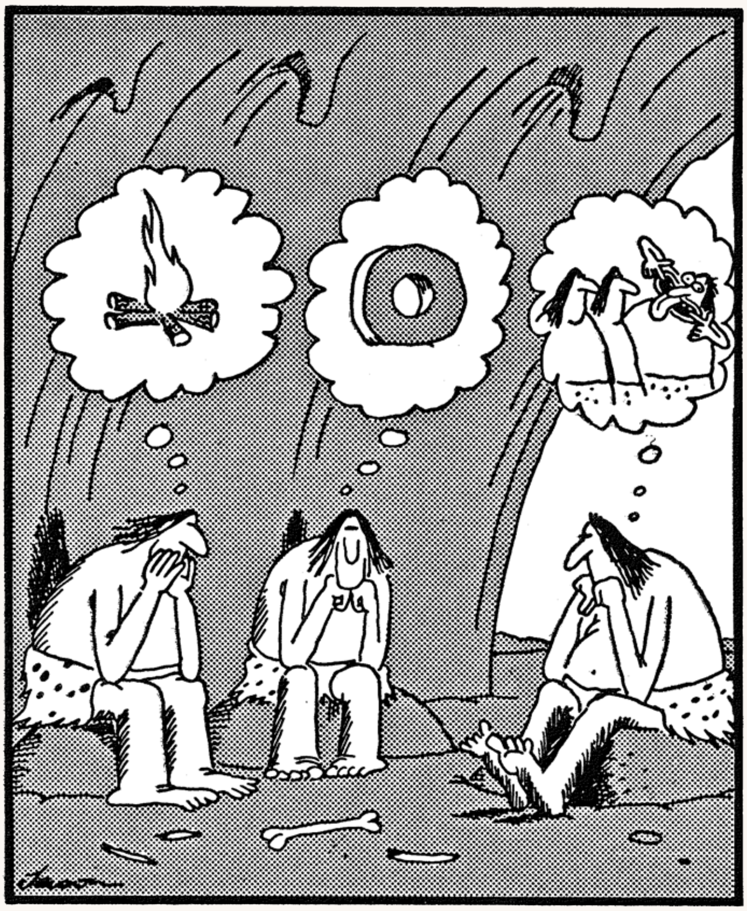
$$g(p/q) = (p/q)g(1), \qquad p/q \in \mathbb{Q}.$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt dann allgemein

$$g(t) = at, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mt der Konstanten $a = g(1)$. Dann aber ist auch

$$\varphi(t) = \exp(g(t)) = \exp(at). \quad ◃$$



Primitive think tanks