Ana-1 VÜ-8

Ws 2020/21 22.01.21

1 Die Funktion f sei auf $[0,b]$ stetig, auf $(0,b)$ differenzierbar, und es sei $f(0)=0$. Ist f' (streng) monoton wachsend, so ist auch f/t (streng) monoton wachsend.

Zz.: $\frac{f(t)}{t}$ (streng) monoton wachsend:

Kriterium: $t>0$:

$$\left(\frac{f(t)}{t}\right)' = \frac{f'(t)\cdot t - f(t)\cdot 1}{t^2}$$

$$= \frac{f'(t)\,t - f(t)}{\underbrace{t^2}_{>0}} \overset{?}{\underset{>}{\geq}} 0$$

$$\iff \quad f'(t)\,t - f(t) \geq 0$$

$$\iff \quad \boxed{f'(t) \underset{>}{\geq} \frac{f(t)}{t}} \quad (t>0)$$

Dazu:

$$f(t) = f(t) - f(0)$$

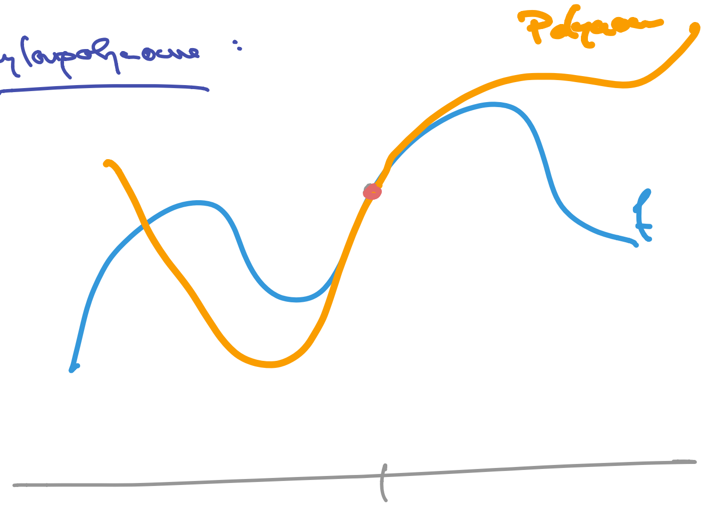
$$\underset{\text{(MWS)}}{=} f'(\tau)\cdot(t-0) \qquad 0<\tau<t$$

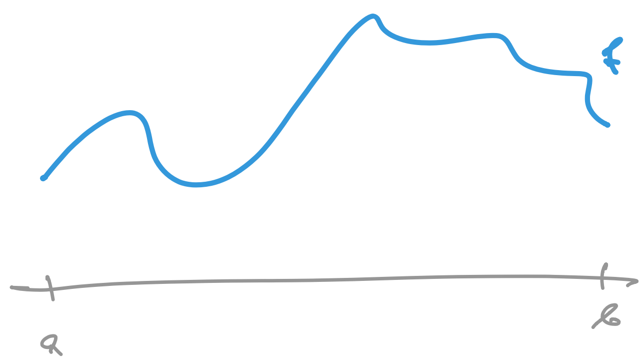
$$= f'(\tau)\cdot t$$

$$f' \nearrow \qquad \underset{<}{\leq} \quad f'(t)\cdot t \qquad (\,: t>0$$

$$\boxed{f'(t) \underset{>}{\geq} \frac{f(t)}{t}}\,.$$

Taylorpolynome :





2 Ist f auf $[a,b]$ differenzierbar und f' monoton, so ist f sogar stetig differenzierbar.

Beweis: Annahme: es gibt $c \in (a,b]$ wo f' nicht stetig.

Bzg: $c > a$, f' nicht linksstetig.

Wegen Monotonie von f': es gibt $\varepsilon > 0$:

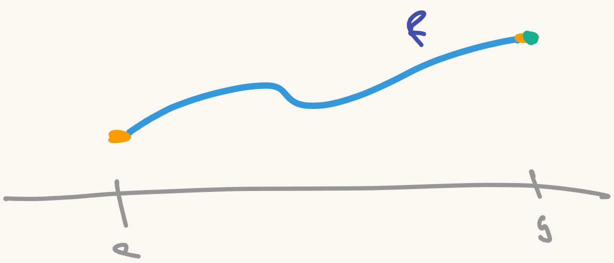
(*) $\boxed{f'(t) \leq f'(c) - \varepsilon \,, \quad t < c}$

Andererseits: $\left| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} - f'(c) \right| < \varepsilon$ für $|t - c| < \delta$

$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} = f'(\tau)$ mit $t < \tau < c$

Gleichung: .

3 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) stetig differenzierbar, und f' sei auf $[a,b]$ stetig fortsetzbar. Dann ist f in a und b ebenfalls differenzierbar.



$f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

? Ex. $\boxed{\text{Sei } \lim_{t \to b} f(t) =: \omega}$

Wenn ja, dann kann man f nach b stetig fortsetzen:

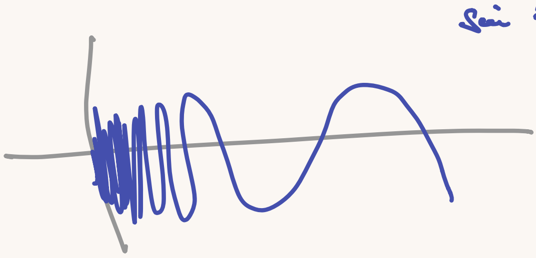
$$\tilde f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde f(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (a,b) \\ \omega, & t = b. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde f$ stetig: stetige Fortsetzung von f.

Das geht nicht immer:

Sei ...



Bem. : Diff.quotient bei a : $h > 0$

MWS : $\underbrace{\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$ $= \underbrace{f'(a + \theta h)}_{\theta \in (0,1)}$,

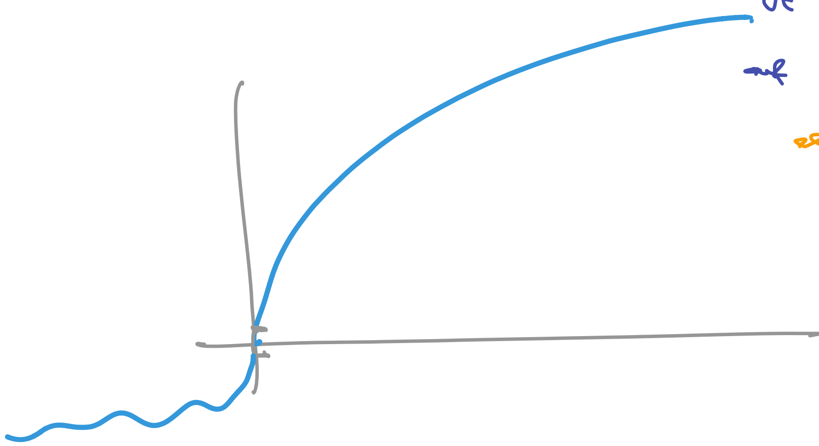
Falls Grenzwert existiert :

$\lim\limits_{h \downarrow 0} f'(a + \underbrace{\theta h}_{\downarrow\, a})$ ex.

Dann ex. auch $\lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

$f : \underbrace{(a,b)}_{\text{offen}} \longrightarrow \mathbb{R}$

offen : Randpunkte a und b



$\sqrt{t}$ auf $\underbrace{[0, \infty)}_{\text{abgeschlossen}}$

4 *Zwischenwertsatz für die erste Ableitung* Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann nimmt f' jeden Wert zwischen $\inf_{(a,b)} f'$ und $\sup_{(a,b)} f'$ an. *Hinweis:* Es ist nicht erforderlich, dass f' stetig ist.

$f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\inf_{(a,b)} f' < u < \sup_{(a,b)} f'$.

Es gibt h : $f'(a) < u$:

$$\boxed{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < u < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}}$$

f: Zwischenwertsatz für festes h

Betrachte $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

als Funktion von t : stetig auf (a,b)

Zeige: Es gibt ein t_0 :

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = u$$

$= f'(\tau)$

für ein τ zwischen t_0+h und t_0.

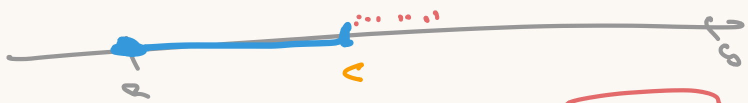
5 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(a) = 0$. Existiert ein $M \geqslant 0$, so dass

$$|f'(t)| \leqslant M\,|f(t)|, \qquad t \in [a,b],$$

so ist $f \equiv 0$.

Beweis: Betrachte

$$c = \sup \underbrace{\{ t \in [a,b] : f|_{[a,t]} \equiv 0 \}}_{\neq \emptyset,\ \text{da } a \text{ enthalten.}}$$



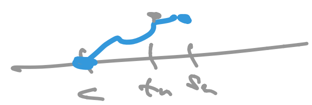
Zz: $c = b$. Angenommen: $\boxed{c < b.}$

$\lightning$

Also: $c = b$, also: $f \equiv 0$. $\square$

Es gibt eine Folge $s_n > c$:

$s_n \downarrow c$, $f(s_n) \neq 0$



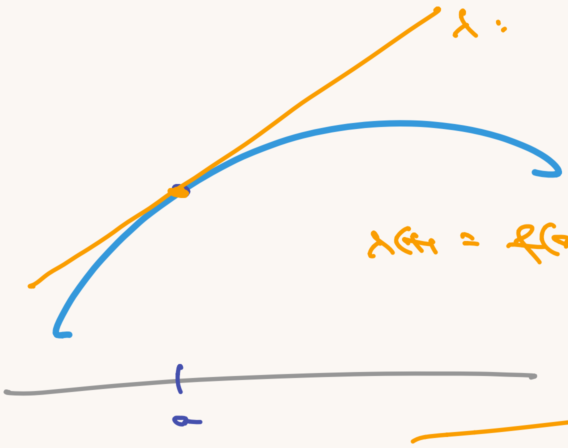
Dann ex.: $t_n \in (c, s_n]$:

$$|f(t_n)| = \max_{s \in [c, s_n]} |f(s)|.$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|f(t_n)| &= |f(t_n) - f(c)| \\
&= |\underbrace{f'(\tau_n)}\cdot(t_n - c)| \\
&\leq M \cdot |f(\tau_n)|\,|t_n - c| \\
&\leq \underbrace{M \cdot |t_n - c|}_{<1 \text{ für } n \text{ groß}} \cdot |f(t_n)| \\
&< |f(t_n)|. \quad \lightning
\end{aligned}
$$

6 Ist $f\colon I\to\mathbb{R}$ im Punkt $a\in I$ differenzierbar, so ist $\lambda\colon t\mapsto f(a)+f'(a)(t-a)$ die eindeutig bestimmte bestapproximierende Gerade an f im Punkt a.



$\lambda(t) = f(a) + f'(a)(t-a)$

$$\boxed{\left|\frac{f(t)-\lambda(t)}{t-a}\right| \xrightarrow[t\to a]{} 0}$$

Sei $m = f'(a)$.

Sei $\tilde m \neq m$, für $f(a) + \tilde m (t-a)$. Dann

eindeutige Eigenschaft:

$$|m-\tilde m| = \left|\frac{(m-\tilde m)(t-a)}{t-a}\right|$$

$$= \left|\frac{\big(f(t)-f(a)-\tilde m(t-a)\big) - \big(f(t)-f(a)-m(t-a)\big)}{t-a}\right|$$

$$\leq \frac{|f(t)-f(a)-\tilde m(t-a)|}{|t-a|} + \frac{|\quad\quad|}{|t-a|}$$

$$\xrightarrow[t\to a]{} 0$$

Also: $m = \tilde m$.

wg Bestapprox.

7 *Verbesserter Schrankensatz* Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann ist f lipschitzstetig auf $[a,b]$ *genau dann*, wenn f' auf (a,b) beschränkt ist. Die bestmögliche Lipschitzkonstante ist in diesem Fall

$$L = \sup_{a<t<b} |f'(t)| . \quad < \infty$$

Gilt f C-Lipschitz:

$$\left| \frac{f(u) - f(v)}{u-v} \right| \le C, \quad u \ne v$$

als Diff. quot.

$\Longrightarrow$ $|f'(x)| \le C, \quad x \in (a,b)$

f diff.

$\Longrightarrow$ $\sup_{t \in (a,b)} |f'(t)| \le C$.

sei fertig

Umgekehrt:

MWS:

$$|f(u) - f(v)| = |f'(w)|\,|v-u| \le C \cdot |v-u|$$

Also ist f C-Lipschitz.

Sei L keine größte untere Schranke:

Sei $\varepsilon > 0$: Dann ex. $w \in (a,b)$

$$|f'(w)| > L - \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann ex. $h > 0$:
$$\left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} \right| > L - \varepsilon$$

Also: $L - \varepsilon$ keine Lip.-Konst.

Es gibt keine kleinere Lipschitzkonst als diese L:

Sei $\varepsilon > 0$: Dann ex. $w \in (a,b)$:

$$|f'(w)| > L - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\| \quad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} \right|$$

Also ex. $h \neq 0$:

$$\left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} \right| > \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= L - \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad |f(w+h) - f(w)| > (L - \varepsilon) \cdot h$$

$$\Longleftrightarrow \quad |f(u) - f(w)| > (L - \varepsilon)\, |u - w|$$

Also ist $L - \varepsilon$ keine Lip-Konst. für f.

Ana-1 VÜ-8

Ws 2020/21 22.01.21

1 Die Funktion f sei auf $[0,b]$ stetig, auf $(0,b)$ differenzierbar, und es sei $f(0)=0$. Ist f' (streng) monoton wachsend, so ist auch f/t (streng) monoton wachsend.

▷ *Lösung* Für $t>0$ ist

$$\left(\frac{f}{t}\right)' = \frac{f't-f}{t^2} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad f't \geqslant f.$$

Dies ist der Fall, denn aufgrund des Mittelwertsatzes und der Monotonie der ersten Ableitung gilt mit einem $\tau \in (0,t)$

$$f(t) = f(t) - f(0) = f'(\tau)(t-0) \leqslant tf'(t).$$

Ersetzt man die Ungleichungen durch strikte Ungleichungen, so erhält man die Behauptung zur strengen Monotonie. ◁

2 Ist f auf $[a,b]$ differenzierbar und f' monoton, so ist f sogar stetig differenzierbar.

▷ *Lösung* Angenommen, f' ist in einem Punkt c nicht stetig. Aufgrund der Monotonie von f' ist dann c eine links- und/oder rechtsseitige Sprungstelle. Nehmen wir an, es ist eine rechtsseitige Sprungstelle. Dann existiert ein $\varepsilon>0$ und ein $\delta>0$, so dass

$$|f'(c)-f'(u)| > \varepsilon, \qquad u \in (c, c+\delta).$$

Andererseits ist

$$f'(c) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\searrow 0} f'(\tau_h)$$

mit jeweils einem geeigneten $\tau_h \in (c, c+h)$ aufgrund des Mittelwertsatzes. Also existieren auch Punkte $v \in (c, c+\delta)$ mit

$$|f'(c) - f'(v)| < \varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch. ◁

3 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) stetig differenzierbar, und f' sei auf $[a,b]$ stetig fortsetzbar. Dann ist f in a und b ebenfalls differenzierbar.

▷ *Lösung* Aufgrund des Mittelwertsatzes ist für $h>0$ hinreichend klein

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h)$$

mit einem geeigneten $\theta \in (0,1)$ für jedes h. Nach Voraussetzung existiert

$$\lim_{h\searrow 0} f'(a+\theta h) = \lim_{t \searrow a} f'(t).$$

Also ist f im Punkt a rechtsseitig differenzierbar. — Der Punkt b wird genauso behandelt. ◁

4 *Zwischenwertsatz für die erste Ableitung* Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann nimmt f' jeden Wert zwischen $\inf_{(a,b)} f'$ und $\sup_{(a,b)} f'$ an. *Hinweis:* Es ist nicht erforderlich, dass f' stetig ist.

▹ *Lösung* Sei m eine reelle Zahl mit

$$\inf_{(a,b)} f' < m < \sup_{(a,b)} f'.$$

Da die Ableitung von f Werte unter und über m annimmt, muss dies auch für hinreichend kleine Differenzenquotienten gelten. Es gibt also Punkte $u,v \in [a,b]$ und ein hinreichend kleines $h > 0$, so dass

$$\frac{f(u+h)-f(u)}{h} < m < \frac{f(v+h)-f(v)}{h}.$$

Diese Quotienten sind stetig als Funktionen von u respektive v. Aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt daher auch ein $w \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(w+h)-f(w)}{h} = m.$$

Aufgrund des Mittelwertwertsatzes gibt es dann einen Punkt $c \in (w, w+h)$ mit

$$f'(c) = m. \quad ◃$$

5 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(a) = 0$. Existiert ein $M \geqslant 0$, so dass

$$|f'(t)| \leqslant M\,|f(t)|, \qquad t \in [a,b],$$

so ist $f \equiv 0$.

▹ *Lösung* Sei

$$c = \sup\{s \in [a,b] : f|[a,s] \equiv 0\}.$$

Es ist $c \geqslant a$, da a zu der Menge auf der rechten Seite gehört. Zu zeigen ist, dass $c = b$. — Angenommen, es ist $c < b$. Dann gibt es eine Folge von Punkten $b \geqslant t_1 > t_2 > .. > t_n \searrow c$ mit

$$\max_{c \leqslant t \leqslant t_n} |f(t)| \leqslant |f(t_n)|.$$

Für diese t_n gilt dann, mit einem $\tau_n \in (c, t_n)$,

$$\begin{aligned} |f(t_n)| = |f(t_n) - f(c)| &\leqslant |f'(\tau_n)|\,|t_n - c| \\ &\leqslant M\,|f(\tau_n)|\,|t_n - c| \\ &\leqslant M\,|t_n - c|\,|f(t_n)|. \end{aligned}$$

Für hinreichend große n ist aber $M\,|t_n - c| < 1$, und es ergibt sich ein Widerspruch. ◃

6 Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ differenzierbar, so ist $\lambda\colon t \mapsto f(a) + f'(a)(t-a)$ die eindeutig bestimmte bestapproximierende Gerade an f im Punkt a.

▹ *Lösung* Denn hat $\tilde{m}$ dieselbe Eigenschaft, so gilt für alle $t \neq a$

$$\begin{aligned} |m - \tilde{m}| &= \frac{|(m-\tilde{m})(t-a)|}{|t-a|} \\ &\leqslant \frac{|f(t) - f(a) - \tilde{m}(t-a)|}{|t-a|} + \frac{|f(t) - f(a) - m(t-a)|}{|t-a|}. \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck für $t \to a$ verschwindet, ist $\tilde{m} = m$. Aufgrund dieser Eindeutigkeit ◃

7 *Verbesserter Schrankensatz* Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann ist f lipschitzstetig auf $[a,b]$ *genau dann*, wenn f' auf (a,b) beschränkt ist. Die bestmögliche Lipschitzkonstante ist in diesem Fall

$$L = \|f'\|_{(a,b)} = \sup_{a<t<b} |f'(t)|.$$

▹ *Lösung* Ist f L-Lipschitz, so gilt für jeden Differenzenquotienten die Abschätzung

$$\left|\frac{f(u) - f(v)}{u - v}\right| \leqslant L.$$

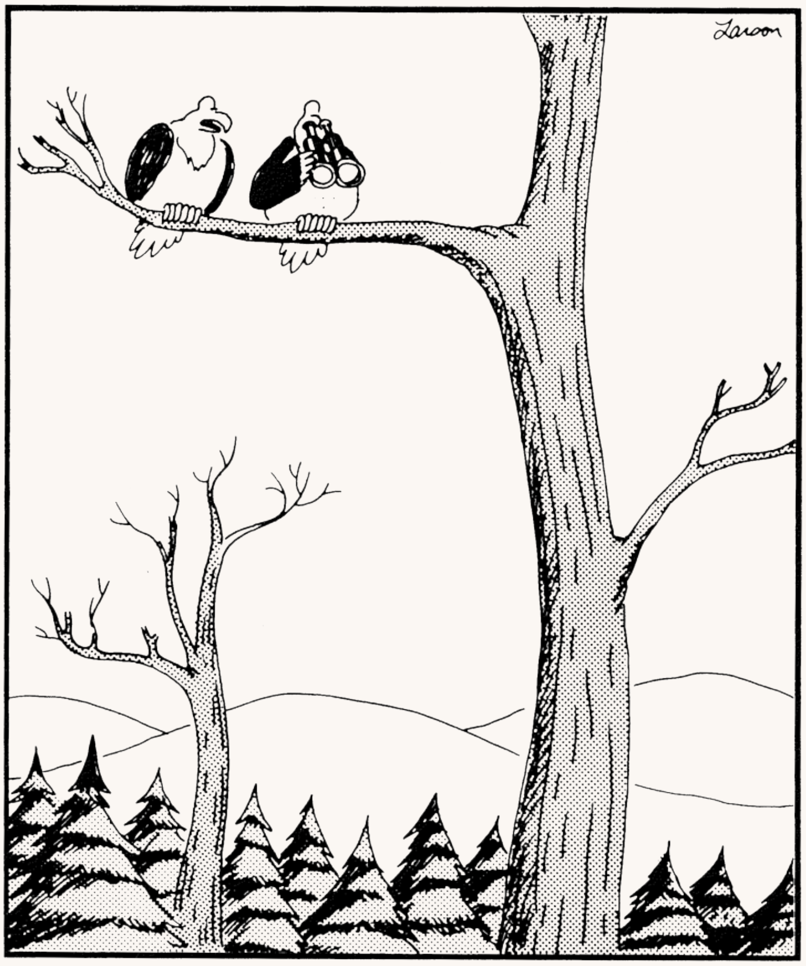
Dasselbe gilt dann für deren Grenzwerte, also die Ableitung von f an jedem Punkt von (a,b). Also ist $\sup_{(a,b)} |f'| \leqslant L$.
Gilt umgekehrt $\sup_{(a,b)} |f'| = L < \infty$, so folgt für $a \leqslant u < v \leqslant b$ mit dem Mittelwertsatz

$$|f(v) - f(u)| = |f'(w)|\,|v-u| \leqslant L\,|v-u|.$$

Somit ist f L-lipschitz. Diese Konstante kann auch nicht verbessert werden. Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $w \in (a,b)$ mit $|f'(w)| > L - \varepsilon/2$. Also gibt es auch ein h mit

$$\left|\frac{f(w+h) - f(w)}{h}\right| > L - \varepsilon.$$

Also kann $L - \varepsilon$ keine Lipschitzkonstante von f sein. ◃



"You're cheating, Ned."