1 Man berechne die Funktionsgrenzwerte an den reellen Nullstellen des Nennerpolynoms.

a. $\frac{t^2-9}{t-3}$ b. $\frac{x^2+4x}{2x+8}$ c. $\frac{9u^2-4}{3u+2}$ d. $\frac{t^2+4t+4}{t^2-4}$

Idee: Hat der Nenner eine Nullstelle, und verschwindet der Zähler an dieser Nullstelle ebenfalls, so kann man Zähler und Nenner durch den entsprechenden gemeinsamen Faktor dividieren und damit den Ausdruck vereinfachen. Dann sieht man weiter ... Die Regel von l´Hospital liefert dafür später eine allgemeine Formel.

a. $\frac{t^2-9}{t-3} = \frac{(t-3)(t+3)}{t-3}$ NS $t=3$

$= t+3 \xrightarrow[t\to 3]{} 6$.

b. NS $x = -4$:

$(x^2+4x) : (2x+8) = \frac{1}{2}x$
$-(x^2+4x)$
$\overline{\quad 0 \quad}$

$x^2+4x = x(x+4) = \frac{1}{2}x\cdot(2x+8)$

$\frac{x^2+4x}{2x+8} = \frac{1}{2}x \xrightarrow[x\to -4]{} -2$

c. $\dfrac{9a^2-4}{3a+2}$ NS $-\frac{2}{3}$

$(9a^2-4) : (3a+2) = 3a-2$

$(3a-2)\cdot(3a+2)$

$$\frac{9a^2-4}{3a+2} = 3a-2 \xrightarrow[a\to-\frac{2}{3}]{} -4.$$

d. $\dfrac{t^2+4t+4}{t^2-4}$ NS : $-2, +2$

gemeinsamer Faktor $(t-(-2)) = t+2$

$$= \frac{(t+2)^2}{(t-2)(t+2)}$$

$$= \frac{t+2}{t-2} \xrightarrow[t\to-2]{} 0$$

$$\xrightarrow[t\to 2]{} \pm\infty$$

genauer : $\xrightarrow[t\downarrow 2]{} +\infty$

$$\xrightarrow[t\uparrow 2]{} -\infty$$

2 Desgleichen für

a. $\dfrac{6x^3 - x^2 - x}{2x - 1}$ *b.* $\dfrac{t^3 - 2t^2 - 5t + 6}{(t-1)(t+2)}$ *c.* $\dfrac{u^4 + u^2 - 2}{u^3 - u^2 + u - 1}$

a. NS : $\frac{1}{2}$

$$(6x^3 - x^2 - 2) : (2x - 1) = 3x^2 + x$$

$$\frac{6x^3 - x^2 - x}{2x-1} = 3x^2 + x \xrightarrow[x \to \frac{1}{2}]{} \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{6x^3 - x^2 - x}{2x-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{18x^2 - 2x - 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{18}{4} - 1 - 1\right) = \frac{5}{4}.$$

6. $$\frac{t^3-2t^2-5t+6}{(t-1)(t+2)}$$ NS $1\,,\ -2$

$$(t^3-2t^2-5t+6):(t-1) = t^2-t-6$$

$$= \frac{t^2-t-6}{t+2} = t-3$$

$$\xrightarrow[t\to 1]{} -2$$

$$\xrightarrow[-2]{} -5$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^3-2t^2-5t+6}{(t-1)(t+2)} = -2$$

c. $\dfrac{a^4 + a^2 - 2}{a^3 - a^2 + a - 1}$ NS bei 1

$(a^4 + a^2 - 2) : (a-1) = a^3 + a^2 + 2a + 2$

$(a^3 \quad \ldots \quad)$ --- $= a^2 + 1$

$$= \frac{a^3 + a^2 + 2a + 2}{a^2 + 1}$$

keine weitere NS

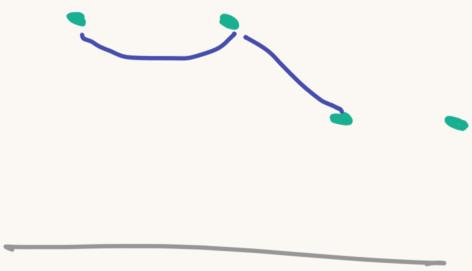
$$\xrightarrow[a \to 1]{} \frac{6}{2} = 3$$

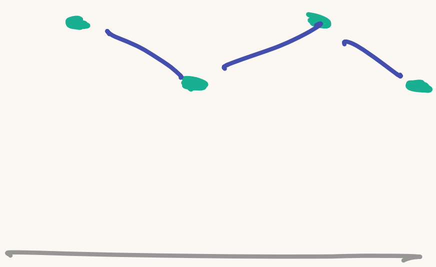
$$\lim_{a \to 1} \frac{a^4 + a^2 - 2}{a^3 - a^2 + a - 1} = \lim_{a \to 1} \frac{4a^3 + 2a}{3a^2 - 2a + 1} = \frac{6}{2}.$$

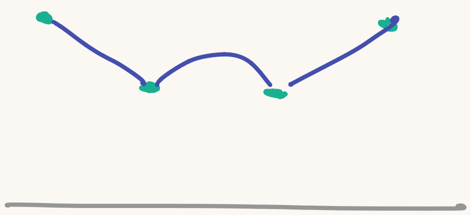
3 Nimmt $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jeden ihrer Werte genau zweimal an, so kann h nicht stetig sein.

Angenommen, h ist stetig. Dann nimmt h sein Max und sein Min je genau zweimal an (und zwei sind verschieden).

Egal, wie Max und Min verteilt sind, müssen dann gewisse Werte mindestens dreimal angenommen werden:







4 Für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n x^{n-1}\Big|_{a}. \quad = (x^n)'\Big|_{x=a}$$

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1}a^0 + x^{n-2}a^1 + \dots + a^{n-1}x^0$$

$$\lim_{x\to a} \text{---} \cdot \text{---} = \lim_{x\to a} (\text{———} \cdot \text{—})$$

$$= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1}}_{n\text{-mal}}$$

$$= n \cdot a^{n-1}.$$

l'Hospital:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{nx^{n-1}}{1} = na^{n-1}.$$

5 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodisch*. Das heißt, es gilt $f(t+T) = f(t)$ für ein $T > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Gilt dann

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0,$$

so ist $f(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Periodisch: $f(t+T) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$.

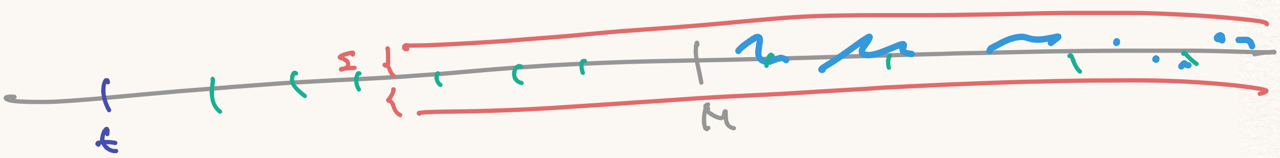
Sei $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Dann ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$:

$$|f(t)| < \varepsilon, \quad t > M$$

$$\iff \quad f(t) \in U_\varepsilon(0), \quad t \in U_{1/M}(\infty)$$

$$U_\delta(\infty) := \left(\tfrac{1}{\delta}, \infty\right), \quad \delta > 0.$$

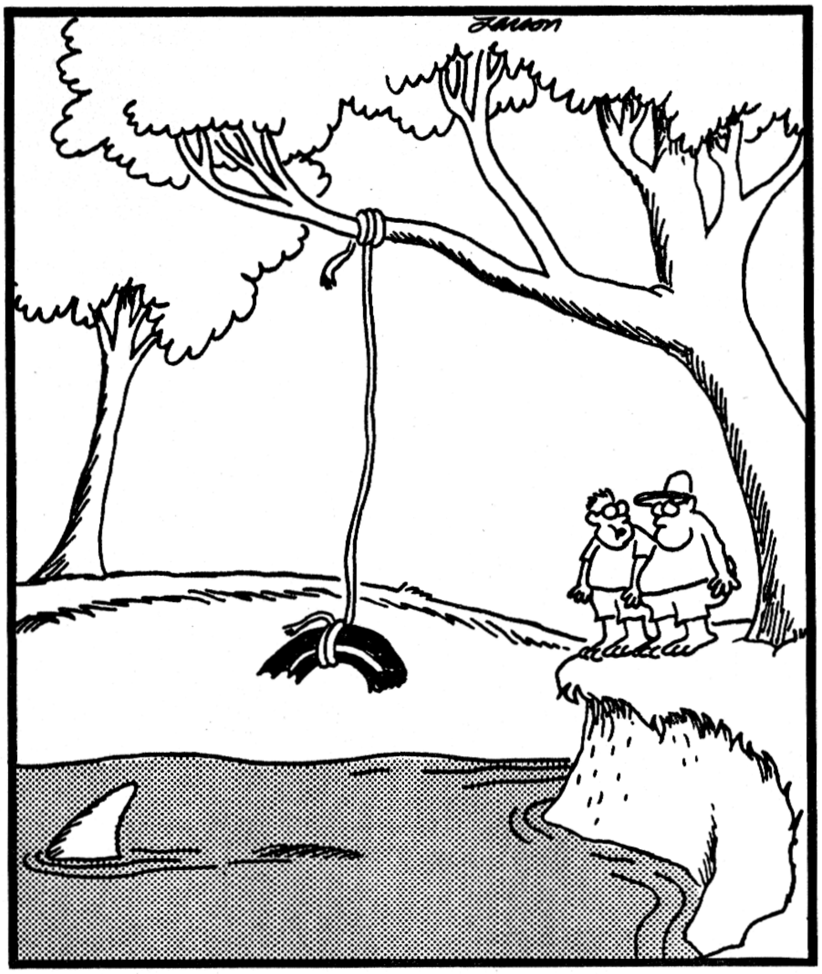


Da $f(t) = f(t+T) = f(t+nT), \quad n \in \mathbb{N}$

und $t + nT > M$ für n genügend groß:

Folge: $|f(t)| < \varepsilon$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $f(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. ∎



"Listen. . . . You go tell Billy's mother, and I'll start looking for another old tire."