1 Zeigen sie, dass die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to (-1,1), \quad t \mapsto \frac{t}{1+|t|}$$

bijektiv ist, und dass h und h^{-1} stetig sind.

2 Ist eine Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist sie streng monoton.

3 Die *Thomaefunktion*

$$\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tau(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q, & x = p/q \text{ mit teilerfremden } p,q \text{ und } q > 0. \end{cases}$$

– eine Art *modifizierte Dirichletfunktion* – ist in jedem rationalen Punkt unstetig und sonst stetig.

4 Sei $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ konvergent mit positiven Gliedern. Zu einer beliebigen Abzählung q von $\mathbb{Q}$ definiere man dann

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n\colon q_n \leqslant t} a_n.$$

Dann ist f

a. streng monoton,

b. in jedem irrationalen Punkt stetig,

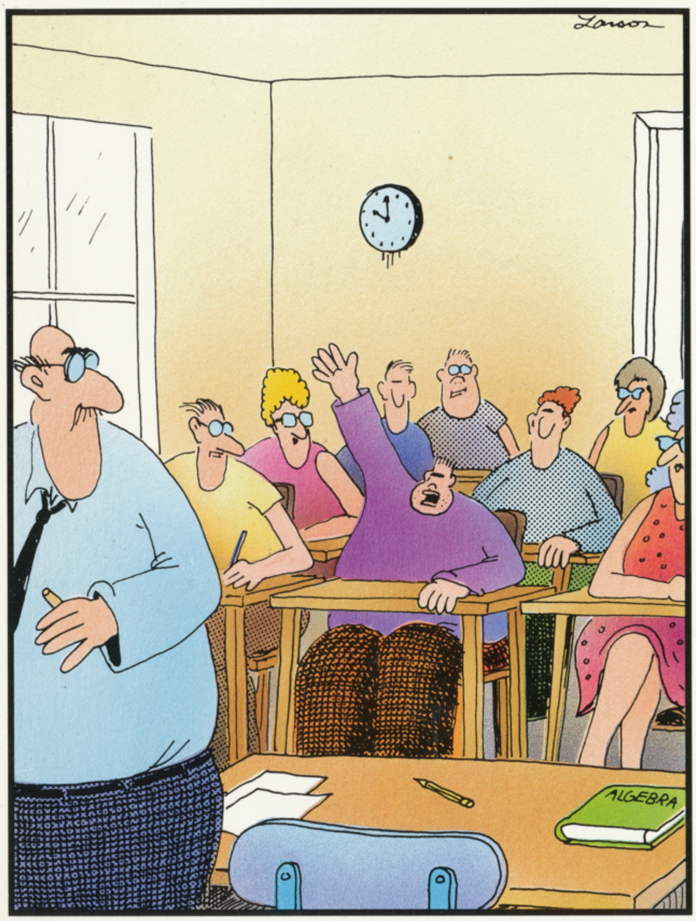
c. in jeder rationalen Zahl $r = q_n$ unstetig mit Sprunghöhe a_n.

5 Zu einer stetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiere man $f^*\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f^*(t) = \max_{[a,t]} f.$$

a. f^* ist monoton steigend, stetig, und es gilt $f^* \geqslant f$.

b. f^* ist die kleinste solche Funktion. Hat also eine Funktion $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dieselben Eigenschaften wie f^*, so gilt $f^* \leqslant \phi$.



"Mr. Osborne, may I be excused?
My brain is full."