6. Üb 18.12.20

$h: \mathbb{R} \to (-1,1)$

$$h(t) = \frac{t}{1+|t|}.$$

Klar:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t} \geq 0, & t \geq 0 \\ \frac{t}{1-t} < 0, & t < 0 \end{cases}$$

$t \geq 0$ (< 0):

$$\frac{t}{1 \pm t} = s \quad < 1 \quad (> -1)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = s(1 \pm t) = s \pm st$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 \mp s)\, t = s$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{s}{1 \mp s}, \quad s < 1, \quad s > -1$$

Ergebnis:

$$t = \begin{cases} \frac{s}{1-s}, & s \geq 0 \\ \frac{s}{1+s}, & s < 0 \end{cases}$$

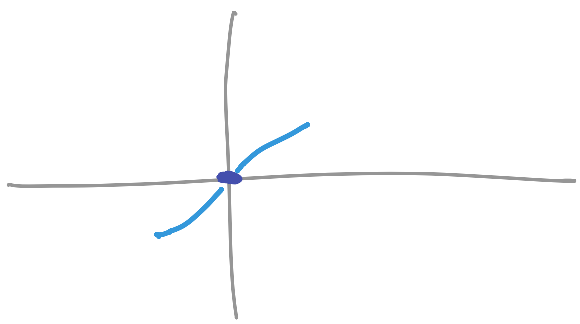
$$= \frac{s}{1-|s|}, \quad -1 < s < 1$$

$(-1,1) \to \mathbb{R}$ stetig.

Es: Conclusioni:

$$h(-t) = \frac{-t}{1+|-t|} = -\frac{t}{1+|t|} = -h(t)$$

Simmetria rispetto $(0,0)$



Monotonia di $t \geq 0$: $\quad 0 < a < b$

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$$

$$\iff a(1+b) < b(1+a)$$

$$\iff a + \cancel{ab} < b + \cancel{ab}$$

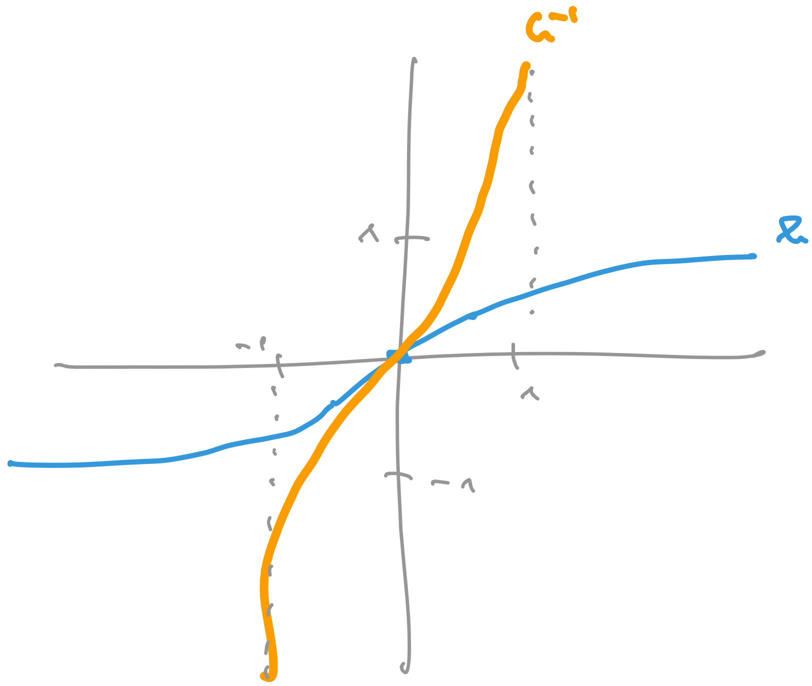
$$\iff a < b$$

Allora h su $\mathbb{R}$ strettamente crescente, dispari

ed è limitata.

$$\frac{t}{1+t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$$

$$\frac{t}{1-t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} -1$$


G^{-1}
1
-1
1
-1

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig & injektiv

Zwei Fälle: $f(a) < f(b)$ oder ...

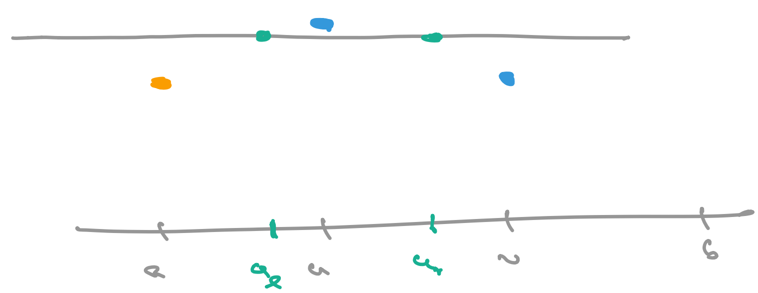
Zz: $f \uparrow$.

Beweis: angenommen, es ex

$a < u < v < b$ und

$f(u) > f(v)$. ↯

$c_0 = f(u) - \varepsilon$



(i) $f(a) < f(u)$: $f(a) < f(u)$

$f(v) < f(u)$

(ii)

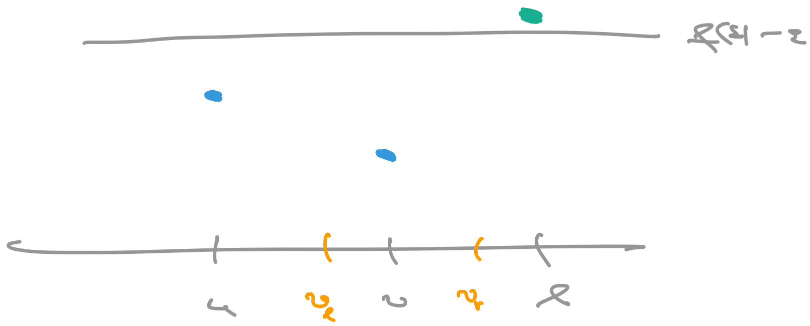
ZWS: es gibt

$c_2 < u < c_1$: $f(c_2) = f(c_1)$

$= f(u) - \varepsilon$ ↯

(ii) $f(b) > f(a)$: $f(a) < f(b)$

$f(c) < f(b)$



$x_l < c < x_r$:

$f(x_l) = f(x_r) = f(b) - \varepsilon$

Thomaefunktion :

$$\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\tau(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ teilerfremd}, \ q > 0. \end{cases}$$

1. Unstetig in jedem $r \in \mathbb{Q}$:

$$\tau(r) > 0$$

$$r = \lim x_n, \quad x_n \notin \mathbb{Q}$$

$$\lim_{n \to \infty} \tau(x_n) = 0.$$

$$0 = \lim \tau(x_n) \neq \tau(\lim x_n) = \tau(r) > 0.$$

2. Sei $x \notin \mathbb{Q}$. Sei $\varepsilon > 0$.

Dann : $\exists Q \in \mathbb{N} : \quad \frac{1}{Q} < \varepsilon$

$$R = \left\{ r = \frac{p}{q} : 1 \le q \le Q, \ |r - x| < 1 \right\}$$

ist eine <u>endliche</u> Menge, und $r \neq x$ für alle $r \in R$.

Also:

$$\delta = \min \{ |r - x| : r \in R \} > 0.$$

Betrachte: $U_\delta(x)$:

rational $r \in U_\delta(x)$: dann $r \notin R$, also

$$r = \frac{p}{q} \quad \text{mit} \quad q > Q$$

$$\Rightarrow \quad T(r) = \frac{1}{q} < \frac{1}{Q} < \varepsilon$$

irrational $y \in U_\delta(x)$: $T(y) = 0 < \varepsilon$

Also insgesamt:

$$|T(y) - \underbrace{T(x)}_{=0}| = T(y) < \frac{1}{Q} < \varepsilon.$$

Also stetig in $x \notin \mathbb{Q}$

— $\sum_{n\ge 1} a_n$ summable, $a_n > 0$

— $q = (q_n)_{n\ge 1}$ enumerating of $\mathbb{Q}$.

Define

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(t) = \sum_{n:\, q_n \le t} a_n .$$

Claim: 1. For $s < t$ and

$$\{ n : q_n \le s \} \subsetneq \{ n : q_n \le t \}$$

Then

$$f(s) = \sum_{n:\, q_n \le s} a_n < \sum_{n:\, q_n \le t} a_n = f(t).$$

6. Continuitate în $x \notin \mathbb{Q}$: $\varepsilon > 0$

Există a.î. N:

$$\sum_{n \geq N} a_n < \varepsilon.$$

Fie $x \notin \mathbb{Q}$:

$$\delta = \min_{1 \leq n \leq N} |q_n - x| > 0.$$

Fie $|t - x| < \delta$ atunci

$f(t)$ are termenii $a_1, \dots, a_N$

$f(x)$ — — .

Atunci:

$$|f(t) - f(x)| \leq \sum_{n \geq N} |a_n| < \varepsilon.$$

Deci f continuă în $x \notin \mathbb{Q}$.

c. Sei $x = r = t_n$ für passendes n.

Dann gilt für $t < x$:

$$f(t) = \sum_{m:\, t_m \le t} a_m$$

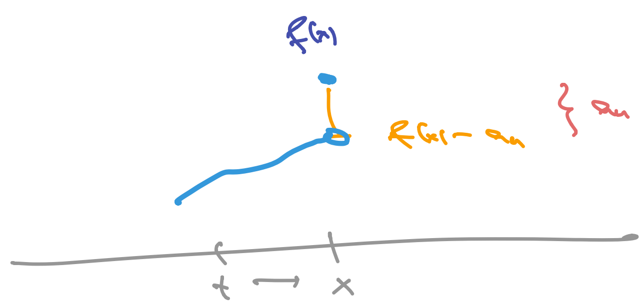
$$\le \sum_{m:\, t_m < x = r = t_n} a_m = \underbrace{\sum_{m:\, t_m \le x} a_m}_{} - a_n$$

$$= f(x) - a_n.$$

Es gilt für alle $t < x$:

$$f(t) \le f(x) - a_n$$

$$\lim_{t \nearrow x} f(t) \le f(x) - a_n$$



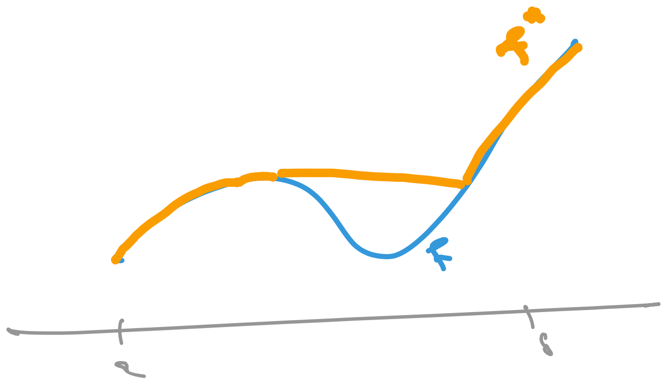
Sprungstelle bei $x = t_n$.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Dann

$$f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$f^*(t) = \max_{[a,t]} f$$



Beweis: a. Für $a < u < v$ ist

$$[a,u] \subset [a,v]$$

also:

$$f^*(u) = \max_{[a,u]} f \le \max_{[a,v]} f = f^*(v)$$

also f^* monoton steigend (nicht notwendig "streng").

$f^*(t) \ge f(t)$ offensichtlich. ✓

Stetigkeit von f^*: Sei $c \in (a,b]$, $\varepsilon > 0$.

Da f stetig: ex. $\delta > 0$:

$$|f(t) - f(c)| < \varepsilon, \quad t \in U_\delta(c) \subset [a,b]$$

$$\Rightarrow \quad f(t) < f(c) + \varepsilon$$

$$< f^*(c) + \varepsilon, \quad t \in U_\delta(c)$$

Außerdem:

$$f(t) \le f^*(c), \quad a \le t \le c$$

Zusammen:

$$f(t) < f^*(c) + \varepsilon, \quad a \le t < c+\delta$$

Also:

$$\boxed{f^*(t) < f^*(c) + \varepsilon, \quad t < c+\delta.}$$

Vertausche t und c: $c < t+\delta$

$$\boxed{f^*(c) < f^*(t) + \varepsilon, \quad c-\delta < t}$$

Zusammen:

$$\boxed{|f^*(t) - f^*(c)| < \varepsilon, \quad t \in U_\delta(c)}$$

6. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie in 5.

mit der Eigenschaft.

Annahme: $f(t) < f^*(t)$ für ein $t \in [a,b]$

Dann folgt

$$\max_{[a,b]} f \leq f(t) < f^*(t)$$

↯ zu Def. von f^*.