5. Ü 11. 12. 20

---

1. a) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ alternierende Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$$

konvergent mit Leibniz.

b. $\sum_{n \geq 1} \sin(n)$

$$\sin(n) \not\to 0$$

Idee: $\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $[-1, 1]$

c. $\sum_{n \geq 1} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ divergent:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1$$

d. $\sum_{n\ge1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \le \frac{1}{\sqrt{n\cdot n^2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

allg. harm. Reihe
mit $\alpha = \frac{3}{2}$

e. $\sum_{n\ge1} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$: divergent.

$$n! = 1\cdot\ldots\cdot n \le n\cdot\ldots\cdot n = n^n$$

$$\sqrt[n]{n!} \le \sqrt[n]{n^n} = n$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \ge \frac{1}{n}$$

2. $\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$

$= \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |b_k|$ Nullfolge, $\leq M$

$\leq M \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |a_k|}_{\text{absolut konv.}}$

$\leq M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

$= M^* < \infty$.

Absolute Konv. notwendig:

$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\to$ L. a

$\sum a_n, \sum b_n$ Konvergent mit Leibniz

$\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$ divergent. ✓

3. $\sum_{k} a_k b_k$.

Sei $B_n = \sum_{1 \le k \le n} b_k$.

Dem.: $b_k = B_k - B_{k-1}$

$$\sum_{n<k\le m} a_k b_k = \sum_{\dots} a_k \left(B_k - B_{k-1} \right)$$

$$= \sum_{\dots} a_k B_k - \sum_{\dots} a_k B_{k-1} \qquad k \to k+1$$

$$= \sum_{n<k\le m} a_k B_k - \sum_{n\le k<m} a_{k+1} B_k$$

$$= a_m B_m - a_{n+1} B_n$$

$$+ \sum_{n<k<m} \left(a_k - a_{k+1} \right) B_k$$

4. <u>Abel-Kriterium</u> :

$\sum a_n b_n$: (a_n) monoton & beschr.

$\sum b_n$ konvergent

dann $\Uparrow$ konvergent.

<u>Beweis</u> : $m > n$:

$$\underbrace{\left| \sum_{n<k\le m} a_k b_k \right|}_{} \longleftarrow \text{erfüllt das CK.}$$

$$\le \Big| \underbrace{a_m B_m - a_{n+1} B_n}_{} \Big| \qquad \underbrace{\text{konv}}_{}, \text{ da beschr.}$$

$$+ \sum_{n<k<m} |a_k - a_{k+1}| \cdot |B_k|$$

$$\le \;—\; " \;— \;+\; M \cdot \sum_{n<k<m} \overbrace{\underbrace{|a_k - a_{k+1}|}_{}}^{}$$

$$\shortparallel$$

$$\Big| \underbrace{\sum (a_k - a_{k+1})}_{\text{wg. Monotonie}} \Big|$$

konv konv

$$\le \underbrace{|a_m B_m - a_{n+1} B_n|}_{\to 0} + \underbrace{M}_{} \cdot \underbrace{|a_n - a_m|}_{\to 0}$$

5. $\sum a_n b_n$ $\qquad$ $a_n \to 0$ monoton.

$\sum b_n$ beschränkt.

$$\left| \sum_{n<k\le m} a_k b_k \right|$$

überprüfe CK.

$$\le \left| a_m B_m - a_{n+1} B_n \right| + \sum_{n<k<m} |a_k - a_{k+1}| \cdot \underbrace{|B_k|}$$

B_k beschränkt

$$\le \underline{\quad\quad} + M \cdot \sum_{n<k<m} \underbrace{|a_k - a_{k+1}|}_{\text{monoton}}$$

$$= \left| \sum (a_k - a_{k+1}) \right|$$

$$\le \underbrace{|a_m B_m|}_{\text{NF}} + \underbrace{|a_{n+1} B_n|}_{\text{NF}} + M \cdot \underbrace{|a_m - a_n|}_{\text{NF}}$$

$\to \qquad \to 0$

6. Abel-Kriterium: (a_n, b_n vertauscht!)

$$\sum a_n \quad \text{konvergent}$$

Beispiele:

$$\left.\begin{aligned} &\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \\ &\frac{1+2n^2}{1+n^2} \\ &\sqrt[n]{n} \end{aligned}\right\} \quad \text{monoton \& konvergente Folgen.}$$

reicht für alle hinr. große n.

7. Die Reihe ist zu untersuchen

$$\sum_{n\geq 1} \frac{s_n}{n}$$

mit $(s_n) = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \dots)$

<u>Dirichlet</u>:

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0$$

$\sum_{k=1}^{n} s_k$ beschränkt:

$$0 \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} s_k}_{\text{einfach!}} \leq 2, \quad n \geq 1.$$

8. a. $$\sum_{n\ge 1} \frac{(7z)^{7n}}{n^7}$$

Konvergent für $|(7z)^{7n}| \le 1$:

Denn:

$$\sum_{n\ge 1} \left| \frac{(7z)^{7n}}{n^7} \right| \le \sum \frac{1}{n^7} < \infty$$

Für $|(7z)^{7n}| > 1$, also

$\iff |7z| > 1$

$\iff |z| > \frac{1}{7}$ divergent, da

$$\frac{(7z)^{7n}}{n^7} \not\to 0 .$$

Also: $R = \frac{1}{7}$.

6. $\sum \underbrace{\rho^{n^2}}_{a_n} z^n, \qquad 0<\rho<1$

~~[illegible]~~ ist für alle z:

$$\sqrt[n]{\rho^{n^2} z^n} = |z| \cdot \rho^n \longrightarrow 0.$$

$R = \infty.$

c. $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$

Quotientenkrit.:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\,|z|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\;|z|^n}$$

$$= \frac{n+1}{n+1}\,|z| \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |z|$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} |z|$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}_{\longrightarrow \frac{1}{e}} |z|$$

$$\longrightarrow \frac{|z|}{e} < 1$$

$$|z| < e$$

$$R = e \,.$$