1 Ist eine beschränkte Zahlenfolge divergent, so besitzt sie mindestens zwei Häufungswerte.

2 Besitzt jede *konvergente* Teilfolge einer *beschränkten* reellen Folge denselben Grenzwert, so ist auch die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. Für unbeschränkte Folgen gilt dies nicht.

3 Sei $a > 1$. Zeigen sie, dass die Folge

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), \qquad n \geqslant 1.$$

monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Wieso ist dies ein Gegenbeispiel zum Satz von der monotonen Konvergenz ?? in $\mathbb{Q}$?

4 *Limes inferior und limes superior* Jeder reellen Folge (c_n) wird durch

$$a_n := \inf\{c_m : m \geqslant n\}, \qquad b_n := \sup\{c_m : m \geqslant n\}$$

eine monoton steigende Folge (a_n) und eine monoton fallende Folge (b_n) zugeordnet. Deren eigentliche oder uneigentliche Grenzwerte

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

werden der *limes inferior* respektive der *limes superior* der Folge (c_n) genannt und mit $\liminf c_n$ respektive $\limsup c_n$ bezeichnet.

a. Es ist

$$\liminf_n c_n = \sup_n \inf_{m\geqslant n} c_m, \qquad \limsup_n c_n = \inf_n \sup_{m\geqslant n} c_m,$$

und es gilt $\liminf c_n \leqslant \limsup c_n$.

b. Die Punkte a und b sind Häufungswerte der Folge (c_n).

c. Bezeichnet H die Menge aller Häufungswerte von (c_n) in $\bar{\mathbb{R}}$, so ist

$$a = \inf H, \qquad b = \sup H.$$

Somit ist a der kleinste und b der größte Häufungswert der Folge (c_n) in $\bar{\mathbb{R}}$.

d. Ist $-\infty < a < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$a - \varepsilon < c_n, \qquad n \geqslant N.$$

Ist $a = \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$c_n > 1/\varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Entsprechendes gilt für b.

e. Die Folge (c_n) ist eigentlich oder uneigentlich konvergent genau dann, wenn ihr limes inferior und limes superior zusammenfallen. In diesem Fall ist dies auch der Grenzwert der Folge.

5 Sei X eine nichtleere Menge, $F(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$ der Raum aller reellen Funktionen auf X, und

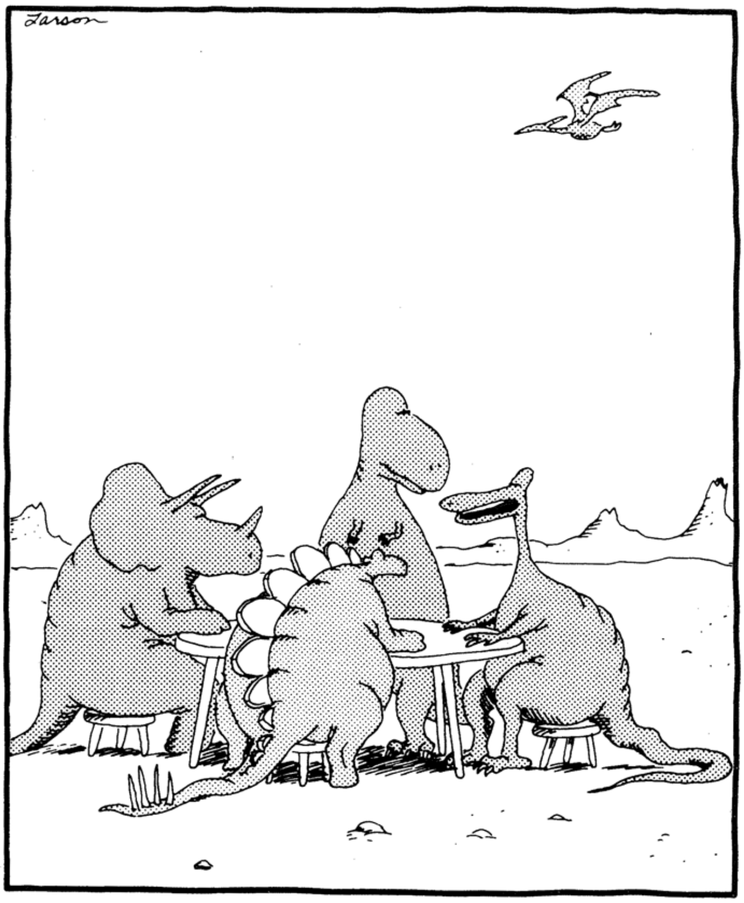
$$\|f\|_X \coloneqq \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

a. $F(X)$ ist ein reeller Vektorraum mit Unterraum $B(X) \coloneqq \{f \in F(X) : \|f\|_X < \infty\}$.

b. $\|\cdot\|_X$ ist eine Norm auf $F(X)$ nur dann, wenn X endlich ist.

c. $\|\cdot\|_X$ ist immer eine Norm auf $B(X)$, genannt *Supremumsnorm*.

d. Mit dieser Norm ist $B(X)$ ein Banachraum.



"Well, time for our weekly brain-stem-storming session."