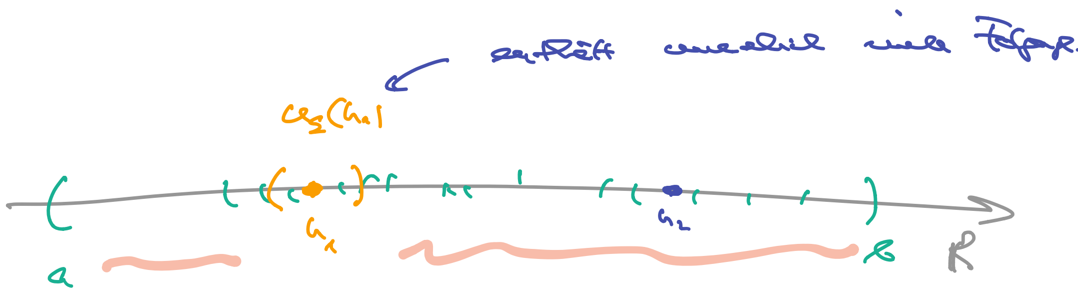
4. Üb 4.12.20



enthält unendlich viele Folgengl.
$U_\varepsilon(a_1)$
a_1
a_2
a
b
$\mathbb{R}$

Beweis: Angenommen, die Folge ist beschränkt divergent.

Dann hat sie also mindestens 2 verschiedene HPe.

Also gibt es zwei verschiedene Teilfolgen mit versch. Grw. ↯

Beispiele:

$(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots)$

Jede konvergente TF muss denselben Gw 0 haben.

Bsp.: $(1, 2, 3, 4, \ldots)$

$a = 2 \in \mathbb{Q} \quad : \quad a_n \in \mathbb{Q}$

Sei $a > 1$, $\quad \boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right).}$

<u>Monotonie</u>:

$$a_{n+1} \le a_n$$

$$\iff \cancel{a_n} + \frac{a}{a_n} \le \cancel{2}a_n$$

$$\iff \boxed{a \le a_n^2, \quad n \ge 1.}$$

Für $n=1$: $\quad a_1 = a > 1$

also: $\quad a_1^2 = a^2 = a \cdot a \ge a \cdot 1 = a.$

Allgemein:

$$a_{n+1}^2 \ge a$$

$$\iff \left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)^2 \ge 4a$$

$$\iff a_n^2 + \cancel{2a} + \frac{a^2}{a_n^2} \ge \cancel{4}^{\,2} a \qquad \Big| : a > 1$$

$$\iff \underbrace{\frac{a_n^2}{a} + \frac{a}{a_n^2}}_{x + \frac{1}{x} \ge 2, \quad x > 0} \ge 2.$$

Wissen jetzt

$$a_n \searrow r \geq \sqrt{a}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$$

Zum Grenzwert übergehen: $n \to \infty$

$$r = \frac{1}{2}\left(r + \frac{a}{r}\right)$$

$$\cancel{2}r = \cancel{r} + \frac{a}{r}$$

$$\iff \quad r^2 = a.$$

$$\iff \quad r = \sqrt{a}.$$

Beliebige Cauchyfolge $(c_n)_{n\geq 1}$.

$$C_n = \{ c_m : m \geq n \}$$

Also

$$C_n \supseteq C_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Definiere

$$a_n := \inf C_n$$

$$b_n := \sup C_n$$

Dann:

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

und

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{in } \bar{\mathbb{R}}$$

Achtung: a_n, b_n folgen i. A. nicht der Folge (c_n).

Bsp:

c_n	a_n	b_n
$\frac{1}{n}$	0	$\frac{1}{n}$
n	n	∞
$(-1)^n$	-1	1
$(-1)^n n$	$-\infty$	∞

$a := \lim a_n$: $a_n \nearrow a$ $(-\infty)$

$b := \lim b_n$: $b_n \searrow b$ (∞)

Also gilt: $a \leq b$.

Andere Definition:

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \lim a_n = \lim \left(\inf c_n \right) = \sup \inf c_n = \sup_n \inf_{m \geq n} c_m$$

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim b_n = \lim \left(\sup c_n \right) = \inf \sup c_n = \inf_n \sup_{m \geq n} c_m.$$

6. <u>Häufungspunkte</u>: Betrachte a:

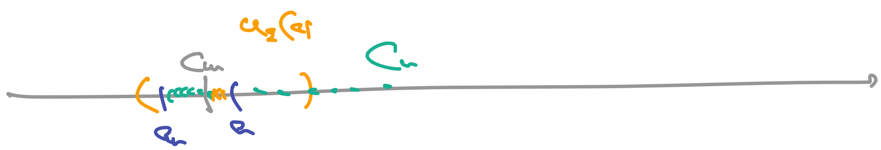
$$a_n \nearrow a$$

D.h.:

$$a_n \in U_\varepsilon(a), \qquad n \geq N(\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \quad C_n \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow \quad c_n \in U_\varepsilon(a) \quad \text{für alle } n.$$



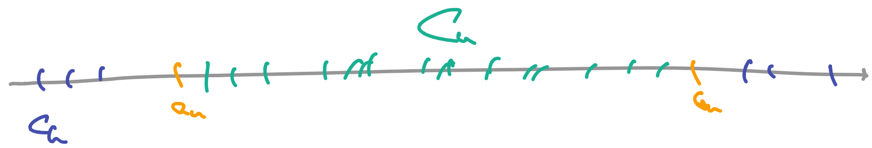
Daraus folgt: es gibt eine Teilfolge

$$c_{n_k} \longrightarrow a, \qquad k \to \infty$$

Also ist a HP von (c_n).

S:

$$a_n \le c_n \le b_n$$



c_n

mit $N<n$

Dann: $a_n \le c_n \le b_n$, $n \ge N$

Also: $a \le c \le b$.

Also: $a = \inf c$, $b = \sup c$ } für $a, b \in \mathbb{R}$.

Bsp:

c_n	$a_n \nearrow$	a	$b_n \searrow$	b
$\frac{1}{n}$	0	0	$\frac{1}{n}$	0
n	n	∞	∞	∞
$(-1)^n$	-1	-1	1	1
$(-1)^n n$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞

d. ε-N Test für lim sup/$\underline{\text{inf}}$:

$$\underset{\inf c_m}{\overset{\shortparallel}{a_n}} \in U_\varepsilon(a), \qquad n \ge N(\varepsilon)$$

Also:

$$a_n \le c_m, \qquad m \ge n \ge N(\varepsilon)$$

Fall $a \in \mathbb{R}$:

$$a - \varepsilon < c_m, \qquad m \ge N(\varepsilon)$$

Fall $a = \infty$: $\quad U_\varepsilon(a) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$

$$\frac{1}{\varepsilon} < c_m, \qquad m \ge N(\varepsilon)$$

Fall $a = -\infty$ $\quad a - \varepsilon = -\infty - \varepsilon = -\infty.$

c. "$\Rightarrow$" Sei (c_n) konvergent, also

$$c = \lim c_n ,$$

Dann ist c der einzige Häufungspunkt der Folge.

Also

$$c = \liminf c_n = \limsup c_n .$$

"$\Leftarrow$" $a = b$. Also:

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \text{für } m \geq n.$$

$$\begin{matrix} a_n & & b_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & = & b \end{matrix}$$

Dann gilt auch:

$$c_n \longrightarrow a = b .$$

$\blacksquare$

$X \neq \emptyset \quad ; \quad f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(X) := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \}$$

Bsp:

(i) $X = \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Polynome, sin, exp, ...

(ii) $X = \mathbb{C}, \quad f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\operatorname{Re} z$, $|z|$

(iii) $X = A_n$

$= \{1, \dots, n\}, \quad f : A_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f = (f(1), \dots, f(n)) = (f_1, \dots, f_n)$$

$$\mathcal{F}(A_n) \cong \mathbb{R}^n .$$

(iv) $X = \mathbb{N}, \quad f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Zahlenfolgen $(f_1, f_2, \dots) = (f_n)_{n \geq 1}$.

a: reeller VR: $f, g \in \mathcal{F}(X)$:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

[illegible] in $\mathcal{F}(X)$

$\in \mathbb{R}$ $\quad$ $\in \mathbb{R}$

$\cdot$ in $\mathbb{R}$

Übung ~~[illegible]~~: $\mathcal{F}(X)$ reeller VR.

$$\mathcal{B}(X) = \{ f \in \mathcal{F}(X) : \|f\|_X < \infty \} \subset \mathcal{F}(X)$$

که

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup \{ |f(x)| : x \in X \}$$

ثابت OR : $f, g \in \mathcal{B}(X)$

ث.ت: $\lambda f + g \in \mathcal{B}(X) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$

اثبات:

$$|(\lambda f + g)(x)| = |\underbrace{\lambda f(x) + g(x)}_{\text{در } \mathbb{R}}|$$

$$\le |\lambda| \cdot |f(x)| + |g(x)|$$

$$\le |\lambda| \cdot \|f\|_X + \|g\|_X \quad , \quad x \in X$$

$$< \infty$$

پس برای ~~همه~~ $x \in X$:

$$\sup_{x \in X} |(\lambda f + g)(x)| \le |\lambda| \cdot \|f\|_X + \|g\|_X$$

$$\|\lambda f + g\|_X$$

Bsp.: $\|\cdot\|_X$ ist Norm auf $F(X)$ genau dann, wenn $|X| < \infty$.

Bew.:

$$|X| < \infty \implies \Big|\underbrace{\{|f(x)| : x \in X\}}_{\subset \mathbb{R}}\Big| < \infty$$

$$\implies \sup\{\ \} = \max\{..\} < \infty$$

$$\implies \|f\|_X < \infty.$$

Falls $|X| = \infty$. Dann "$\mathbb{N} \subset X$".

Also: $F(X)$ enthält eine reelle Folge, und die kann unbeschränkt sein, so

$$\|f\|_X = \infty.$$

Sei [illegible] : $f, g \in B(X)$

z.z.: $\lambda f + g \in B(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Dazu:

$$|(\lambda f + g)(x)| = |\underbrace{\lambda f(x) + g(x)}_{\text{من } \mathbb{R}}|$$

$$\leq |\lambda| \cdot |f(x)| + |g(x)|$$

$$\leq |\lambda| \cdot \|f\|_X + \|g\|_X \quad , x \in X$$

$$< \infty$$

Dann gilt für alle $x \in X$:

$$\sup_{x \in X} |(\lambda f + g)(x)| \leq |\lambda| \cdot \|f\|_X + \|g\|_X$$

$$\|\lambda f + g\|_X$$

d. $(B(X), \|\cdot\|_X)$ ist Banachraum:

Sei (f_n) Cauchyfolge in $B(X)$.

$$\|f_n - f_m\|_X < \varepsilon, \quad n,m \geq N(\varepsilon)$$

Dann $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \qquad < \varepsilon,$ — " —

Also: $(f_n(x))_{n\geq 1}$ ist CF in $\mathbb{R}$:

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ex. für jedes $x \in X$.

Definiere punktweise

$$f : X \to \mathbb{R},$$

$$\underbrace{f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{\text{wohldefiniert.}}$$

Also: $f \in F(X)$

Zz.: $f \in B(X)$, $\|f_n - f\|_X \to 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\|f_n - f_m\|_X < \varepsilon, \qquad m, n \geq N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \qquad \text{— " —}$$

$$\Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \qquad n \geq N(\varepsilon)$$

$(m \to \infty)$

Für alle $x \in X$ richtig: Dann:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \qquad \text{— " —}$$

$$\|f_n - f\|_X \leq \varepsilon, \qquad \text{— " —}$$

1. $\Rightarrow \quad \|f\|_X \leq \|f_n\|_X + \varepsilon < \infty$

$\Rightarrow \quad f \in B(X)$

2. $\|f_n - f\|_X \longrightarrow 0$

Also: $f_n \longrightarrow f$ in $B(X)$. ∎