1 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}$ durch 7 teilbar.

2 Sei $0 < x_k < 1$ für $1 \leqslant k \leqslant n$. Dann gilt

a. $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$

b. $\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$

c. $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}\right) \geqslant n^2$.

3 *Binetsche Darstellung der Fibonacchizahlen* Für die Folge $(f_n)_{n\geqslant 1}$ der Fibonacchizahlen ?? mache man den Ansatz

$$f_n = a\lambda^n + b\mu^n, \qquad n \geqslant 0.$$

a. Man bestimme a und b aus den beiden Anfangswerten der Fibonacchifolge.

b. Man bestimme λ und μ aus der Rekursionsformel.

c. Man zeige damit die *Binetsche Darstellung*

$$f_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$$

mit den Zahlen des *goldenen Schnitts* $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\mu = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4 Für die Fibonacchizahlen gilt *a.* $\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$. *b.* $\sum_{k=1}^{n} B_k^n f_k = f_{2n}$.

5 *Hauptteil der Wurzel* Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gibt es genau ein $w \in \mathbb{C}$ mit

$$w^2 = z, \qquad \Re w > 0.$$

Und zwar ist

$$w = \sqrt{\frac{|z| + \Re z}{2}} + \mathrm{i}\sigma\sqrt{\frac{|z| - \Re z}{2}}, \qquad \sigma = \operatorname{sgn}(\Im z).$$

1 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}$ durch 7 teilbar.

Lösung ⏩ Sei $a_n = 1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}$. Es ist $a_0 = 7$, die Behauptung für $n = 0$ also offensichtlich richtig. Um von n auf $n+1$ zu schließen, rechnen wir einfach mal:

$$\begin{aligned} a_n^2 &= (1 + 2^{2^{n+1}} + 2^{2^{n+2}}) + 2\,(2^{2^n} + 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n + 2^{n+1}}) \\ &= a_{n+1} + 2 \cdot 2^{2^n}(1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}) \\ &= a_{n+1} + 2^{2^n+1} a_n. \end{aligned}$$

Also ist

$$a_{n+1} = (a_n - 2^{2^n+1})a_n = (1 - 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}})a_n.$$

Ist also a_n durch 7 teilbar, so auch a_{n+1}. ⏪

2 Sei $0 < x_k < 1$ für $1 \leqslant k \leqslant n$. Dann gilt

a. $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$

b. $\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$

c. $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}\right) \geqslant n^2$.

Lösung ⏩ *a.* Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Gilt die Aussage für irgendein $n \geqslant 1$, so folgt

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1}(1 + x_k) &= \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)\right)(1 + x_{n+1}) \\ &\geqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1 + x_{n+1}) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k, \end{aligned}$$

denn der Term $x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k$ ist positiv.

b. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Gilt die Aussage für irgendein $n \geqslant 1$, so folgt

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1}(1 - x_k) &\geqslant \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1 - x_{n+1}) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{n+1} + x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \end{aligned}$$

denn wie zuvor ist der Term $x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k$ positiv.

c. Für $n = 1$ ist das richtig. Per Induktion folgt dann für $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k^{-1}\right) &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}\right) + x_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}\right) + x_{n+1}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + 1 \\ &\geqslant n^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{n+1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_{n+1}}\right) + 1. \end{aligned}$$

Jeder Summand in der Klammer ist $\geqslant 2$ A-??. Also erhalten wir als untere Schranke

$$n^2 + \sum_{k=1}^{n} 2 + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

3 *Binetsche Darstellung der Fibonacchizahlen* Für die Folge $(f_n)_{n\geqslant 1}$ der Fibonacchizahlen ?? mache man den Ansatz

$$f_n = a\lambda^n + b\mu^n, \qquad n \geqslant 0.$$

a. Man bestimme a und b aus den beiden Anfangswerten der Fibonacchifolge.
b. Man bestimme λ und μ aus der Rekursionsformel.
c. Man zeige damit die *Binetsche Darstellung*

$$f_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$$

mit den Zahlen des *goldenen Schnitts* $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\mu = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lösung *a.* Da der Ansatz auch für $n = 0$ gelten sollte, erhält man $f_0 = a + b = 0$ und $f_1 = a\lambda + b\mu = 1$, also

$$a = \frac{1}{\lambda - \mu}, \qquad b = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Daraus folgt übrigens weiter

$$f_2 = a\lambda^2 + b\mu^2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} = \lambda + \mu = 1. \tag{†}$$

b. Nehmen wir $\lambda > \mu$ an, so folgt – hier greifen wir Kapitel ?? über Grenzwerte vor –

$$f_{n+1}/f_n \to \lambda, \qquad n \to \infty.$$

Augrund der Rekursionsformel ist $f_{n+1}/f_n = 1 + f_{n-1}/f_n$, im Grenzwert also

$$\lambda = 1 + 1/\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = \lambda + 1.$$

Mit (†) erhält man für μ ebenfalls

$$\mu^2 = \mu + 1.$$

c. Die Identität ist offensichtlich korrekt für $n = 1$ und $n = 2$. Induktiv erhält man mit der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu) f_{n+1} &= \lambda^n - \mu^n + \lambda^{n-1} - \mu^{n-1} \\ &= \lambda^{n-1}(\lambda + 1) - \mu^{n-1}(\mu + 1)\end{aligned}$$

Mit $\lambda + 1 = \lambda^2$ und $\mu + 1 = \mu^2$ folgt dann die Behauptung für $n + 1$.

4 Für die Fibonacchizahlen gilt *a.* $\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$. *b.* $\sum_{k=1}^{n} B_k^n f_k = f_{2n}$.

Lösung ⏩ *a.* Für $n = 1$ erhält man $f_1 = f_3 - 1$, was wegen $f_1 = 1$ und $f_3 = 2$ korrekt ist. Mit Induktion folgt dann

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k = \sum_{k=1}^{n} f_k + f_{n+1} = f_{n+2} + 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1.$$

b. Mit der Binetschen Darstellung $_{\text{A-0.3}}$, der binomischen Formel $_{\text{A-??}}$ sowie den Identiäten $1 + \lambda = \lambda^2$, $1 + \mu = \mu^2$ folgt

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu) \sum_{k=1}^{n} B_k^n f_k &= \sum_{k=1}^{n} B_k^n \lambda^k - \sum_{k=1}^{n} B_k^n \mu^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} B_k^n \lambda^k - \sum_{k=0}^{n} B_k^n \mu^k = (1 + \lambda)^n - (1 + \mu)^n = \lambda^{2n} - \mu^{2n}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{n} B_k^n f_k = \frac{\lambda^{2n} - \mu^{2n}}{\lambda - \mu} = f_{2n}.$$ ⏪

5 *Hauptteil der Wurzel* Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gibt es genau ein $w \in \mathbb{C}$ mit

$$w^2 = z, \qquad \Re w > 0.$$

Und zwar ist

$$w = \sqrt{\frac{|z| + \Re z}{2}} + \mathrm{i}\sigma \sqrt{\frac{|z| - \Re z}{2}}, \qquad \sigma = \operatorname{sgn}(\Im z).$$

Lösung ⏩ Mit $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ gelangt man zu dem Gleichungssystem

$$u^2 - v^2 = x, \qquad 2uv = y.$$

Löst man die zweite Gleichung nach v auf und setzt das Ergebnis in die erste Gleichung ein, so erhält man wegen der Bedingung $u > 0$ die eindeutigen Lösungen

$$u^2 = \frac{|z| + x}{2}, \qquad u = \sqrt{\frac{|z| + \Re z}{2}}.$$

Damit folgt dann auch

$$v^2 = \frac{|z| - x}{2}.$$

Das Vorzeichen von v ist durch $2uv = y$ und damit $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn}(\Im z)$ bestimmt. ⏪