1 Man beweise die folgenden Identitäten.

a. $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$

b. $\tan u = \dfrac{1 - \cos 2u}{\sin 2u} = \dfrac{\sin 2u}{1 + \cos 2u}$

2 Es gilt

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + .. + \cos nx = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2\sin x/2}.$$

Hinweis: Stellen sie die linke Seite als geometrische Summe dar.

3 Für $t \in \mathbb{R}$ bestimme man

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t), \qquad f_n(t) = \lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi t))^{2k}.$$

Hinweis: Man unterscheide $t \in \mathbb{Q}$ und $t \notin \mathbb{Q}$.

4 Für $t \in \mathbb{R}$ und $n \geqslant 1$ sei $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}$ und

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} |z_n^k - z_n^{k-1}|$$

die Länge des Polygonzugs $z_n^0, z_n^1, .., z_n^n$ auf dem Einheitskreis. Dann gilt

$$L_n(t) = 2n\,|\sin(t/2n)| \to |t|, \qquad n \to \infty.$$

Die Länge des Polygonzugs konvergiert also gegen die Länge des Kreisbogens vom Punkt 1 bis zum Punkt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

5 Man zeige, dass $\sin 1$ und $\cos 1$ irrational sind.

6 *Tschebyschew-Polynome* Für jedes $n \geqslant 1$ gibt es ein Polynom T_n vom Grad n, so dass

$$T_n(\cos t) = \cos nt.$$

Dieses Polynom heißt *Tschebyschew-Polynom* vom Grad n.

a. Man zeige, dass es solche Polynome gibt, und dass

$$T_0 = 1, \qquad T_1(t) = t.$$

b. Es gilt die Rekursionsformel

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \qquad n \geqslant 1.$$

c. Man berechne damit $T_2, .., T_5$.

d. In $[-1, 1]$ hat T_n die Nullstellen

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \qquad k = 1, .., n,$$

und die Extremalstellen $c_k = \cos k\pi/n$, $k = 0, 1, .., n$.

"Late again! . . . This better be good!"