Übung 10 — 5. 2. 2021

n-te Wurzel von

$$\varnothing \neq z = r e^{i\varphi}$$

$$w_0 = r^{1/n} e^{i\varphi/n}$$

eine n-te Wurzel:

$$w_0^n = r e^{i\varphi} = z.$$

Damit:

$$w_k = w_0 \cdot \zeta_n^k, \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$$

Potenzreihe:

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n = \phi(z)$$

Taylorreihe: $f \in C^\infty$

$$f \rightsquigarrow T_{z_0} f(z) = \sum \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

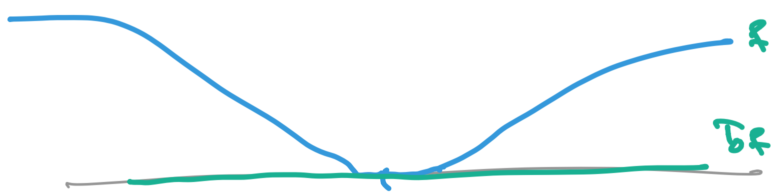
wo konvergent?

wann ist $= f$?

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & , \quad t \neq 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

Dann: $\quad f^{(k)}(0) = \underline{\underline{0}}.$

$$T_0 f(t) \equiv 0$$



Ana-1 VÜ-10

Ws 2020/21 05.02.21

1 Man beweise die folgenden Identitäten.

a. $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$

b. $\tan u = \dfrac{1-\cos 2u}{\sin 2u} = \dfrac{\sin 2u}{1+\cos 2u}$

Dann: $\cos(s+t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \sin t$

Also:

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$= 2\cos^2 u - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 u.$$

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{2\sin^2 u}{2\sin u \cdot \cos u}$$

$$= \frac{1-\cos 2u}{\sin 2u}$$

$$\sin(s+t) = \sin s \cdot \cos t + \cos s \sin t$$

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u.$$

$$(*) \quad = \frac{2\cos u \cdot \sin u}{2\cos^2 u} = \frac{\sin 2u}{1+\cos 2u}. \quad \boxtimes$$

2 Es gilt

$$\boxed{\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + .. + \cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin x/2}}.$$

Hinweis: Stellen sie die linke Seite als geometrische Summe dar.

$$\cos kx = \operatorname{Re} e^{ikx} = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\boxed{\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}}$$

geom. Summe mit $q = e^{ix}$

Dazu: $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$

$$= \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \qquad e^{-ix/2}$$

$$= \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}}$$

$$= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-\dots}}{e^{ix/2} - e^{-\dots}}$$

$$= \frac{\cancel{2i}\,\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\cancel{2i}\,\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \underbrace{\sum_{k=-n}^{\infty} e^{ikx}} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{ikx}}$$

geometric sum:

$$\boxed{\sum_{k \geq N} q^k = \frac{q^N}{1-q}}$$

$$= \sum_{k=0} q^{N+k}$$

$$= q^N \cdot \sum_{k\geq 0} q^k = \frac{q^N}{1-q}$$

3 Für $t \in \mathbb{R}$ bestimme man

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t), \qquad f_n(t) = \lim_{k\to\infty} (\cos(n!\pi t))^{2k}.$$

Hinweis: Man unterscheide $t \in \mathbb{Q}$ und $t \notin \mathbb{Q}$.

$t \in \mathbb{Q}$: Dann $\underbrace{n!\pi t}$ $= \underbrace{n!\cdot t}\cdot \pi$

$= N\pi, \quad n \geq n_0$

Also: $\cos(n!\pi t) = \pm 1$

$\Rightarrow \cos(n!\pi t)^{2k} = 1,$

$n \geq n_0.$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 1, \quad t \in \mathbb{Q}.$

$t \notin \mathbb{Q}$: Dann $\underbrace{n!\pi t}$ niemals ein Vielfaches von π

$\Rightarrow |\cos(n!\pi t)| < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} (\cos(n!\pi t))^{2k} = 0.$

Also: $f_n(t) = 0, \quad n \geq 1$

$t \notin \mathbb{Q}.$

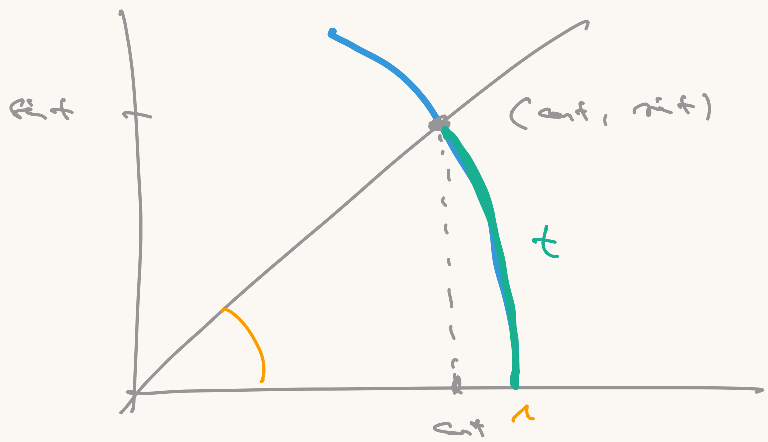
4 Für $t \in \mathbb{R}$ und $n \geqslant 1$ sei $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}$ und

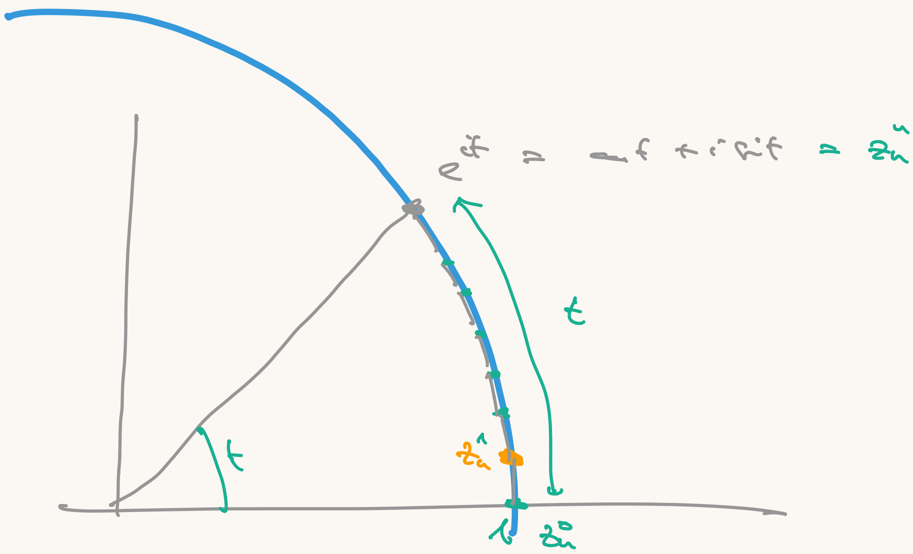
$$L_n(t) = \sum_{k=1}^{n} |z_n^k - z_n^{k-1}|$$

die Länge des Polygonzugs $z_n^0, z_n^1, \ldots, z_n^n$ auf dem Einheitskreis. Dann gilt

$$L_n(t) = 2n\,|\sin(t/2n)| \to |t|, \qquad n \to \infty.$$

Die Länge des Polygonzugs konvergiert also gegen die Länge des Kreisbogens vom Punkt 1 bis zum Punkt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.





$z_n = e^{it/n}$: $z_n^0, z_n^1, \ldots, z_n^n$

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{|z_n^{k} - z_n^{k-1}|} \qquad |z_n| = 1$$

$$= \underbrace{|z_n|}_{=1}^{k-1} \, |z_n - 1| \qquad z_n = e^{it/n} = \cos\frac{t}{n} + i\sin\frac{t}{n}$$

$$= |z_n - 1|$$

Dazu:

$$|z_n - 1|^2 = \big(\underbrace{1 - \cos\tfrac{t}{n}}\big)^2 + \big(\sin\tfrac{t}{n}\big)^2$$

$$= 2 - 2\cos\frac{t}{n}$$

$$= 2\,\boxed{\left(1 - \cos\tfrac{t}{n}\right)}$$

$$= 2\cdot\boxed{2\cdot\sin^2\tfrac{t}{2n}}$$

Also:

$$\boxed{|z_n - 1| = 2\cdot\sin\frac{t}{2n}} \qquad (t>0)$$

Also

$$L_n(t) = n\cdot|z_n - 1| = \underbrace{2n}\cdot\sin\underbrace{\frac{t}{2n}}$$

$\lim_{n\to\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} L_n(t) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{t}{n} \qquad \frac{1}{n} = x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin tx}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{t\cdot\cos tx}{1} = t.$$

5 Man zeige, dass sin 1 und cos 1 irrational sind.

$$s = \sin 1 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}_{s_n} \quad \Big\}\ \text{Partialsumme}$$

Dann

$$s_n = \frac{p_n}{q_n}, \qquad q_n = (4n+1)!$$

Dann

$$\boxed{\frac{p_n - 1}{q_n} < s < \frac{p_n}{q_n}}$$

Abschätzung:

$$\sum_{k>2n} \frac{1}{(2k+1)!} < \frac{1}{q_n}$$

Wäre s rational, also $s = \frac{p}{q}$, dann:

$$q > q_n \longrightarrow \infty$$

für alle n ↯.

6 *Tschebyschew-Polynome* Für jedes $n \geqslant 1$ gibt es ein Polynom T_n vom Grad n, so dass

$$T_n(\cos z) = \cos nz.$$

Dieses Polynom heißt *Tschebyschew-Polynom* vom Grad n.

a. Man zeige, dass es solche Polynome gibt, und dass

$$T_0 = 1, \qquad T_1(t) = t.$$

b. Es gilt die Rekursionsformel

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \qquad n \geqslant 1.$$

c. Man berechne damit $T_2, .., T_5$.

d. In $[-1,1]$ hat T_n die Nullstellen

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi, \qquad k = 1, .., n,$$

und die Extremalstellen $c_k = \cos k\pi/n$, $k = 0, 1, .., n$.

a. Moivre: $e^{int} = (e^{it})^n$

$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$

$\Rightarrow \cos nt = \mathrm{Re}\,(\cos t + i \sin t)^n$

$= \mathrm{Re}\,(\ldots \cos^{2k} t \cdot \sin^{2k} t)$

$(\sin^2 t)^k = (1 - \cos^2 t)^k$

$\vdots$

$=$ Polynom in $\cos t$.

T_0: $T_0(\cos z) = 1$

$T_0 \equiv 1$, ✓

$n=1$ $T_1(\cos z) = \cos z$.

$T_1 = t$. ✓

Rekursionsformel: $nt = (n-1)t + t$

$$\cos nt = \cos t \cdot \cos(n-1)t - \sin t \, \sin(n-1)t \qquad \Big| \cdot \cos t$$

$$\sin nt = \cos t \, \sin(n-1)t + \sin t \, \cos(n-1)t \qquad \Big| \cdot \sin t$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos t \cdot \cos nt + \sin t \cdot \sin nt = \cos(n-1)t}$$

Außerdem:

$$\cos(n+1)t = \cos t \cdot \cos nt - \sin t \cdot \sin nt$$

$$= 2 \cos t \cdot \cos nt - \cos(n-1)t .$$

$$T_{n+1}(\cos t) = 2 T_1(\cos t)\, T_n(\cos t) - T_{n-1}(\cos t)$$

$$\boxed{T_{n+1} = 2t \cdot T_n - T_{n-1} .}$$

Nullstellen & Extremalstellen:

$$T_n(\cos t) = \cos nt \; , \quad 0 \le t \le \pi$$

cos hat ~~auf~~ $[0, n\pi]$ die Nullstellen

$$nx = k\pi - \frac{\pi}{2} \, , \qquad k = 1, \dots, n$$

$$x = \frac{k - \frac{1}{2}}{n} \cdot \pi \qquad \text{— " —}$$

Extremalstellen:

$$nx = k\pi \, , \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

$$x = \frac{k\pi}{n} \qquad \text{— " —}$$

Abbildung und so ....

"Late again! . . . This better be good!"