1 In $\mathbb{R}$ sei eine Operation $*$ erklärt durch

$$a * b \coloneqq a + b + \frac{ab}{\lambda}$$

mit einem festen $\lambda \neq 0$.

a. Die Operation $*$ ist kommutativ, assoziativ und besitzt ein neutrales Element.

b. Welche Elemente besitzen ein inverses Element?

2 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + .. + ab^{n-1} + b^n).$$

3 *Dirichletsches Schubfachprinzip*

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{A}_m \to \mathbb{A}_n$ mit $m > n$ kann nicht injektiv sein, wobei

$$\mathbb{A}_n = \{1, .., n\}.$$

Man kann also nicht $n+1$ Socken auf n Schubladen verteilen, ohne dass wenigstens eine Schublade zwei Socken enthält.

Etwas Kombinatorik

Wir erwähnen noch einige elementare Sätze der Kombinatorik, die sämtlich mittels vollständiger Induktion bewiesen werden, beispielsweise Sätze über die Anzahl von Teilmengen, Permutationen, und Auswahlmengen. Ein wesentliches Ergebnis ist hierbei die allgemeine binomische Formel.
Zuerst betrachten wir die Anzahl aller möglichen Bijektionen einer n-elementigen Menge auf sich. Dies ist gleichbedeutend mit der Frage, wieviele Vertauschungen der Elemente eines n-Tupels es gibt.

1 **Satz** *Es gibt genau $n!$ verschiedene Permutationen von n Objekten.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ *Induktionsanfang:* Für ein einziges Objekt gibt es genau eine Möglichkeit der Anordung, die Anzahl ist also $1 = 1!$.
Induktionsschluss: Haben wir $n + 1$ Objekte, so haben wir für die Wahl des ersten Elements der Anordnung genau $n + 1$ Möglichkeiten. Danach bleiben uns noch n Elemente für die weitere Anordnung. Wenden wir hierauf die Induktionsannahme an, so erhalten wir als Gesamtzahl der Anordungsmöglichkeiten

$$(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Jetzt fragen wir nach der Zahl aller möglichen m-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

2 **Satz** *Eine n-elementige Menge besitzt genau*

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

m-elementige Teilmengen, wobei $0 \leqslant m \leqslant n$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Gesamtzahl aller *m-Tupel*, die sich aus $n \geqslant m$ Elementen bilden lassen, ist

$$n(n-1)\cdot\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

denn sukzessive können wir aus $n, n-1, \ldots, n-m+1$ Elementen für die nächste Komponente auswählen. Da es bei Mengen aber nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, müssen wir noch durch die Anzahl aller möglichen Permutationen von m Elementen dividieren. Somit ist die Anzahl aller *m-elementigen Teilmengen* gleich

$$\frac{1}{m!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = \binom{n}{m}. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Beispiel Es gibt

$$\binom{49}{6} = 10\,068\,347\,520$$

Möglichkeiten, 6 aus 49 zu spielen.

Die im vorangehenden Satz auftretenden Ausdrücke heißen *Binomialkoeffizienten* und treten in vielen Fragestellungen der Kombinatorik und Statistik auf. Für uns spielen sie vor allem eine Rolle in der binomischen Formel und der Produktregel der Differenziation. — Zunächst die elementarsten Eigenschaften dieser Koeffizienten.

3 **Satz** *Für alle* $0 \leqslant m \leqslant n$ *gilt*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

sowie für $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}.$$

Man beachte, dass dies die binomischen Koeffizienten rekursiv beschreibt.

Die letzte Aussage ist eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\left(\frac{1}{n-m+1} + \frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m(n-m+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} = \binom{n+1}{m}.\end{aligned}$$

Alles andere ist noch einfacher.

Aus der letzten Formel ergibt sich, dass bei Anordnung der Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck wie in Abbildung 1 – mit $\binom{n}{m}$ an der m-ten Stelle in der n-ten Zeile, mit der Zählung beginnend bei Null – jedes Element die Summe der beiden direkt über ihm stehenden Elemente ist.

4 **Binomische Formel** *Für alle reellen Zahlen* a *und* b *und alle* $n \geqslant 0$ *gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Für $n = 2$ und $n = 3$ sind dies die bekannten Formeln

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Abb 1 Die ersten sieben Zeilen des Pascalschen Dreiecks

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& \binom{0}{0} &&&&&& \\
&&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&&& \\
&&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&&& \\
&&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} &&& \\
&& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} && \\
& \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} && \binom{6}{1} && \binom{6}{2} && \binom{6}{3} && \binom{6}{4} && \binom{6}{5} && \binom{6}{6}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& 1 && 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 2 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&& \\
&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 && \\
& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 & \\
1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1
\end{array}
$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ reduziert sich die Behauptung auf $1 = 1$, und für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1.$$

Dies ist also korrekt.

Induktionsschluss: Nehmen wir die Gültigkeit der Formel für irgendein $n \geqslant 1$ an, so folgt

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Die erste Summe schreiben wir als

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k = a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k.$$

Die zweite Summe wird nach Umnummerierung $k + 1 \to k$ zu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k.$$

Mit

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

können wir beiden letzten rechts stehenden Summen zusammenfassen und erhalten

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,
\end{aligned}
$$

was der Behauptung für $n + 1$ entspricht.

Mit den binomischen Formeln für $(1+1)^n = 2^n$ und $(1-1)^n = 0$ erhalten wir zum Beispiel folgendes

5 **Korollar** *Für alle* $n \geqslant 1$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \qquad \rtimes$$

1 In $\mathbb{R}$ sei eine Operation $*$ erklärt durch

$$a * b := a + b + \frac{ab}{\lambda}$$

mit einem festen $\lambda \neq 0$.

a. Die Operation $*$ ist kommutativ, assoziativ und besitzt ein neutrales Element.

b. Welche Elemente besitzen ein inverses Element?

Lösung ⇒ *a.* *Kommutativität:* Die rechte Seite ist invariant unter Vertauschung von a und b. Also ist

$$a * b = b * a.$$

Assoziativität:

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + ab/\lambda) * c \\ &= a + b + c + ab/\lambda + ac/\lambda + bc/\lambda + abc/\lambda^2.\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist invariant unter Permutationen von a, b, c und deshalb gleich $(b * c) * a = a * (b * c)$.

Neutrales Element:

$$a * e = a \quad \Leftrightarrow \quad a + e + ae/\lambda = a \quad \Leftrightarrow \quad (1 + a/\lambda)e = 0.$$

Dies gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $e = 0$.

b. Jedes $a \neq -\lambda$ besitzt das inverse Element

$$a^{-1} = -\frac{a\lambda}{a + \lambda}.$$

Aber $-\lambda$ besitzt kein Inverses Element. ⇐

2 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + .. + ab^{n-1} + b^n).$$

Lösung ⇒ Es ist

$$a^n + a^{n-1}b + .. + ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$$

und deshalb

$$\begin{aligned}&(a - b)(a^n + a^{n-1}b + .. + ab^{n-1} + b^n) \\ &= a\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k - b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^{k+1} - b^{n+1}.\end{aligned}$$

Die beiden mittleren Terme heben sich auf, denn mit $l = k + 1$ wird

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{l=1}^{n} a^{n-(l-1)} b^l = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1} b^k.$$

Damit bleibt $a^{n+1} - b^{n+1}$, und die Behauptung ist bewiesen. ◂◂

3 *Dirichletsches Schubfachprinzip*
Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{A}_m \to \mathbb{A}_n$ mit $m > n$ kann nicht injektiv sein, wobei

$$\mathbb{A}_n = \{1, .., n\}.$$

Man kann also nicht $n + 1$ Socken auf n Schubladen verteilen, ohne dass wenigstens eine Schublade zwei Socken enthält.

Lösung ▸▸ Wir betrachten die Kontraposition:
Ist $\varphi : \mathbb{A}_m \to \mathbb{A}_n$ *injektiv, so ist* $m \leqslant n$.
Dies beweisen wir durch Induktion über n. Für $n = 1$ ist dies richtig, denn um injektiv auf ein einziges Element abzubilden, darf die Urbildmenge nicht mehr als ein Element enthalten. Sei jetzt

$$\varphi : \mathbb{A}_m \to \mathbb{A}_{n+1}$$

injektiv. Sei $a = \varphi^{-1}(n+1)$ und $\mathbb{A}'_m = \mathbb{A}_m \setminus a$. Dann ist

$$\varphi' = \varphi|_{\mathbb{A}'_m} : \mathbb{A}'_m \to \mathbb{A}_n$$

ebenfalls injektiv. Da außerdem $\mathbb{A}'_m \sim \mathbb{A}_{m-1}$, erhalten wir auch eine injektive Abbildung

$$\varphi'' : \mathbb{A}_{m-1} \to \mathbb{A}_n.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann aber $m - 1 \leqslant n$, oder $m \leqslant n + 1$. Das war zu zeigen. ◂◂