VÜ-1   13.11.2020

Aufgabe:

$$a * b := a + b + \frac{ab}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0 \text{ fest.}$$

Lösung: Kommutativ:

$$a * b = a + b + \frac{ab}{\lambda}$$

$$= b + a + \frac{ba}{\lambda} = b * a. \checkmark$$

Assoz:

$$(a*b)*c = \left(a + b + \frac{ab}{\lambda}\right) * c$$

$$= a + b + \frac{ab}{\lambda} + c + \left(a + b + \frac{ab}{\lambda}\right)\frac{c}{\lambda}$$

$$= a + b + c + \frac{ab}{\lambda} + \frac{ac}{\lambda} + \frac{bc}{\lambda} + \frac{abc}{\lambda}$$

Also:

$$(a*b)*c = (b*c)*a$$

$$= (c*a)*b$$

$$= a*(b*c) \checkmark$$

Neutrales Element: Gesucht e:

$$a * e = a \quad ✓ \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cancel{a} + e + \frac{ae}{\lambda} = \cancel{a} \qquad \Big| -a$$

$$\Longleftrightarrow \quad e + \frac{ae}{\lambda} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad e\left(1 + \frac{a}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

Also ist $e = 0$, das neutrale Element für $*$.

Inverse Element: für $a \neq -\lambda$ ist

$$a^{-1} = -\frac{a\lambda}{a+\lambda} \qquad a+\lambda \neq 0$$

Denn:

$$a * a^{-1} = a - \frac{a\lambda}{a+\lambda} + \left(-\frac{a\lambda}{a+\lambda} \cdot a \cdot \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= a - \frac{a\lambda}{a+\lambda} - \frac{a^2}{a+\lambda}$$

$$= \frac{a^2 + a\lambda - a\lambda - a^2}{a+\lambda} = 0 = e.$$

Für $-\lambda$ ex. kein Inverses :

$$(-\lambda) * a = -\lambda + a + \frac{(-\lambda)a}{\lambda}$$

$$= -\lambda + a - a$$

$$= -\lambda$$

$$\neq 0 . \qquad \blacksquare$$

Aufgabe:

$$(a-b)\underbrace{(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^{n-1})}_{\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^{k}} = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Lsg:

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k}$$

Also:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k} = a\,\square - b\,\square$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k} b^{k} - \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} b^{k} - b^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^{k+1}$$

$k+1 = k$

$k = k-1$

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} b^{k} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1} b^{k}$$

$$= a^{n+1} - b^{n+1}. \qquad \blacksquare$$

Sei $A_n = \{1, \dots, n\}$

<u>Schubfachprinzip</u>: Sei $\varphi : A_m \longrightarrow A_n$.

Falls $m > n$, so ist φ nicht <u>injektiv</u>.

<u>Beweis</u>: Kontraposition: Ist φ injektiv, dann gilt $m \leq n$.

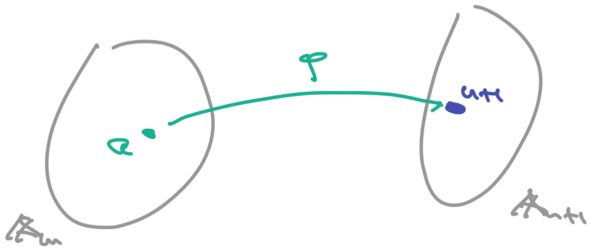
<u>Beweis</u>: Induktion über n.

<u>IA</u>: $n = 1$, $\varphi : A_m \longrightarrow A_1 = \{1\}$ ist injektiv.

Dann folgt nun gleich $m \leq 1$. ✓

<u>IS</u>: Betrachte $\varphi : A_m \longrightarrow A_{n+1}$ sei <u>injektiv</u>.

Dann ist $\varphi^{-1}(n+1) = \{a\}$ mit genau einem $a \in A_m$.



Setze:

$$A_m' = A_m \setminus \{a\} \simeq A_{m-1}$$

$$A_{n+1}' = A_{n+1} \setminus \{n+1\} = A_n .$$

Dann schaffe ich

$$\begin{array}{ccc} \varphi' = \varphi\big|_{A_m'} : & A_m' & \longrightarrow A_n \\ & \Uparrow & \\ & A_{m-1} & \end{array}$$

ebenfalls injektiv.

Induktionsannahme: $\Rightarrow$ gilt

$$m-1 \le n$$

Also gilt auch $m \le n+1$.

Induktion vollständig. ∎

Kombinatorik

Beweis: Induktion:

$n=1$: $1 = 1!$ Permutation ✓

IS: Gegeben $n+1$ Objekte :

$$\underbrace{(n+1)} \cdot \underbrace{(n!)}_{n \text{ Objekte}} = (n+1)!$$

Permutationen.

M m Elemente : $|M| = m$

Teilmenge N mit $n \leq m$ Elemente :

Davon gibt es

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \qquad , \quad 0 \leq m \leq n$$

wohldefiniert,

$n \geq 1$, $m = 0$: $\quad \left.\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\right|_{m=0} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$ ✓

$m = n$: $\quad \Big|_{m=n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$ ✓

$n = 0$: $\quad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$ ✓

Beweis: n Objekte gegeben.

Davon m Objekte auswählen:

$$n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Dividiere durch Anzahl der Permutationen von m Objekten:

$$\frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \binom{n}{m}$$

"n über m"

"n choose m"

Satz. Für alle $0 \leq m \leq n$ gilt

(i) $\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$

(ii) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

(iii) $$\underbrace{\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}.}_{\text{rekursive Def. von } \binom{n}{m}.}$$

Beweis:

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \frac{n!}{(m-1)!\,(n+1-m)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$= \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} \left(\frac{1}{n+1-m} + \frac{1}{m} \right)$$

$$= \text{—} \cdot \text{—} \quad \frac{\cancel{m} + n+1 - \cancel{m}}{m\,(n+1-m)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!} = \binom{n+1}{m}.$$

$\square$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{0} \quad \underbrace{\binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}}_{+} \quad \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{0} \quad \binom{n+1}{n} \quad \binom{n+1}{n+1}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 1 & & 0 & & \\
 & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Satz

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

$n=1$: $a+b = 1 \cdot a^1 b^0 + 1 \cdot a^0 b^1$ ✓

$n=2$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$n=3$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

usw.

Beweis: Induktion: $n=0$ ✓ $n=1$ ✓.

IS:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^n}_{\text{IV:}}$$

$$= (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{k \to k-1}$$

$$a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k$$

$$a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big[\underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}_{= \binom{n+1}{k}}\Big] a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}$$

$$= \underbrace{a^{n+1}}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \underbrace{b^{n+1}}_{k=n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \text{———} \;\;''\;\; \text{————} \;.$$

$$\underset{\text{S.o.}}{=} (a+b)^{n+1}. \qquad \square$$