5.5 Häufungswerte

Es gibt Folgen, die nicht konvergieren, aber trotzdem einem oder mehreren Punkten immer wieder ›beliebig nahe‹ kommen. Statt von Grenzwerten spricht man in diesen Fällen von *Häufungswerten.*

Definition *Eine reelle Zahl a heißt Häufungswert einer reellen Folge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $N \geqslant 1$ ein $n \geqslant N$ gibt, so dass*

$$|a_n - a| < \varepsilon. \quad \rtimes$$

Da es zu *jedem N* ein solches $n \geqslant N$ gibt, ist die Menge $\{n : |a_n - a| < \varepsilon\}$ *unbeschränkt.* Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher *unendlich viele n* mit der Eigenschaft, dass $|a_n - a| < \varepsilon$. Nicht verlangt wird dagegen, dass dies für *alle hinreichend großen n* gilt.

▹ *Beispiele* A. $(1/n)$ hat 0 als Häufungswert und als Grenzwert.
B. $((-1)^n)$ hat die zwei Häufungswerte 1 und -1.
C. (n) hat keinen Häufungswert.
D. $(\sin(n\pi/2 + 1/n))$ hat die drei Häufungswerte -1, 0 und 1. ◃

Den Unterschied zwischen Grenz- und Häufungswert verdeutlicht folgende *Sprachregelung.* Eine Eigenschaft A gilt für *unendlich viele* n, wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$ unbeschränkt ist. Sie gilt *für alle bis auf endlich viele* n, oder kurz für *fast alle* n, wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$ endlich und damit beschränkt ist.

▹ *Beispiele* A. Fast alle Primzahlen sind ungerade.
B. Unendlich viele natürlichen Zahlen sind ungerade, aber nicht fast alle.
C. Fast alle ungeraden Zahlen sind nicht durch 2 teilbar. ◃

Schließlich führen wir noch den grundlegenden Begriff der *Umgebung* ein. Ist $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so nennen wir das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

die *ε-Umgebung* von a. Sie besteht aus allen reellen Zahlen x, deren Abstand von a strikt kleiner als ε ist. — Mit diesen Begriffen können wir Häufungs- und Grenzwerte wie folgt charakterisieren.

24 **Charakterisierung von Häufungs- und Grenzwert** *Eine reelle Zahl a ist Häufungswert einer reellen Folge (a_n) genau dann, wenn in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen. Sie ist ihr Grenzwert, wenn in jeder ε-Umgebung sogar fast alle Folgengleider liegen.* $\rtimes$

Jeder Grenzwert ist somit ein Häufungswert. Aber nicht jeder Häufungswert ist ein Grenzwert. Eine Folge kann keinen, einen, oder viele Häufungswerte haben. Selbst wenn sie nur einen Häufungswert hat, muss dieser kein Grenzwert sein.

▹ *Beispiele* A. $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ besitzt genau zwei Häufungswerte, 1 und -1.
B. $(1, 2, 3, ..)$ besitzt keinen Häufungswert.
C. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, ..)$ besitzt 0 als einzigen Häufungswert, ist aber nicht konvergent. ◃

Zwischen Häufungswert und Teilfolge besteht folgender Zusammenhang, der ebenfalls als Charakterisierung von Häufungswerten dienen kann.

25 **Satz** *Eine reelle Folge (a_n) besitzt a als Häufungswert genau dann, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ $\Leftarrow$ Gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to a$, so liegen in jeder ε-Umgebung von a fast alle Glieder der Teilfolge. Damit liegen in dieser Umgebung aber auch unendlich viele Glieder der Originalfolge. Also ist a ein Häufungswert dieser Folge.

$\Rightarrow$ Sei umgekehrt a ein Häufungswert der Folge (a_n). Sei (ε_n) eine beliebige monoton fallende Nullfolge, zum Beispiel $\varepsilon_n = 1/2^n$. Dann definieren wir rekursiv eine Auswahlfolge (n_k) durch $n_1 := 1$ und

$$n_k := \min\{n > n_{k-1} : a_n \in U_{\varepsilon_k}(a)\}, \qquad k \geqslant 2.$$

Da a ein Häufungswert ist, sind die betrachteten Mengen nicht leer und besitzen somit ein Minimum. Offensichtlich gilt dann $n_k > n_{k-1}$. [2]

Wir behaupten, dass $a_{n_k} \to a$. Nun, da (ε_n) eine positive Nullfolge bildet, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \geqslant 1$ so, dass

$$0 < \varepsilon_k < \varepsilon, \qquad k \geqslant K.$$

Aufgrund der Definition der n_k gilt dann auch

$$a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a) \subset U_\varepsilon(a), \qquad k \geqslant K.$$

In jeder ε-Umgebung von a liegen somit fast alle Glieder der Teilfolge (a_{n_k}). Also gilt $a_{n_k} \to a$. ⟩⟩⟩⟩

Den Satz von Bolzano-Weierstraß können wir damit auch so formulieren.

26 **Satz von Bolzano-Weierstraß** *Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungswert.* ⋊

[2] Statt des Minimums könnten wir auch irgendein Element dieser Menge wählen. Das daran anschließende Argument bleibt davon unberührt.

⟪⟪ Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge [17]. Deren Grenzwert ist damit auch Häufungswert der Gesamtfolge. ⟫⟫

5.6 Uneigentliche Grenzwerte

Neben den klassisch konvergenten Folgen hat man es oft auch mit Folgen zu tun, die in gewisser Weise gegen ∞ oder $-\infty$ streben. Dieses Verhalten können wir präzisieren, indem wir auch für diese Fälle geeignete Umgebungen betrachten. Dazu definieren wir für alle $\varepsilon > 0$ die offenen Intervalle

$$U_\varepsilon(\infty) \coloneqq (1/\varepsilon, \infty), \qquad U_\varepsilon(-\infty) \coloneqq (-\infty, -1/\varepsilon)$$

als *ε-Umgebungen* von ∞ respektive $-\infty$. Es gilt dann beispielsweise

$$U_\delta(\infty) \subset U_\varepsilon(\infty), \qquad 0 < \delta < \varepsilon.$$

Die Umgebungen werden also ›kleiner‹, wenn ε kleiner wird – wie es sich für Umgebungen gehört. Man beachte, dass diese Umgebungen die Punkte ∞ respektive $-\infty$ *nicht enthalten.*

Definition *Eine reelle Folge (a_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞, wenn in jeder ε-Umgebung von ∞ fast alle Folgenglieder liegen. Man nennt dann ∞ den uneigentlichen Grenzwert einer solchen Folge und schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Entsprechendes gilt für die uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$. ⋊

Auch im Fall der uneigentlichen Konvergenz ist der Grenzwert *eindeutig bestimmt*. Aber natürlich ist eine uneigentlich konvergente Folge *nicht beschränkt*.

Notiz *Es gilt $a_n \to \infty$ genau dann, wenn zu jedem $M > 0$ ein $N \geqslant 1$ existiert, so dass*

$$a_n > M, \qquad n \geqslant N.$$

Jede beliebige Schranke wird also von fast allen Folgengliedern übertroffen. ⋊

▹ *Beispiel* Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Denn sei $M > 0$. Wegen $M^n/n! \to 0$ 12 gibt es ein N, so dass

$$\frac{M^n}{n!} < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Für $n \geqslant N$ ist also $n! > M^n$ und damit $\sqrt[n]{n!} > M$. ◃

Grenzwertsätze

Die Grenzwertgleichungen 7 verallgemeinern sich nur unter zusätzlichen Voraussetzungen auf uneigentliche Grenzwerte. Um diese handlich zu formulieren, schreiben wir $a_n \succ c$ mit einer reellen Konstanten c, wenn $a_n > c$ für fast alle n gilt.

27 **Satz** *Für reelle Folgen (a_n) und (b_n) gilt:*

(i) $|a_n| \to \infty \;\Rightarrow\; a_n^{-1} \to 0$.
(ii) $a_n \to 0 \wedge a_n \succ 0 \;\Rightarrow\; a_n^{-1} \to \infty$.
(iii) $a_n \to \infty \wedge b_n \succ c \;\Rightarrow\; a_n + b_n \to \infty$.
(iv) $a_n \to \infty \wedge b_n \succ c > 0 \;\Rightarrow\; a_n b_n \to \infty$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei jeweils $\varepsilon > 0$. (i) Gilt $|a_n| > 1/\varepsilon$ für fast alle n, so gilt auch

$$|a_n^{-1}| = |a_n|^{-1} < \varepsilon$$

für fast alle n. Also bildet (a_n^{-1}) eine Nullfolge.

(ii) Nach Voraussetzung sind fast alle Folgenglieder a_n positiv. Da (a_n) eine Nullfolge bildet, gilt $0 < a_n < \varepsilon$ für fast alle n. Dann gilt aber auch

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{a_n},$$

also $a_n^{-1} \in U_\varepsilon(\infty)$ für fast alle n. Somit gilt $a_n^{-1} \to \infty$.

(iii) Wegen $a_n \to \infty$ gilt $a_n > 1/\varepsilon - c$ für fast alle n. Also gilt auch

$$a_n + b_n > \frac{1}{\varepsilon} - c + b_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

für fast alle n. Fast alle Glieder der Folge $(a_n + b_n)$ liegen somit in $U_\varepsilon(\infty)$, was zu zeigen war.

(iv) Für fast alle n gilt $a_n > \varepsilon/c$. Mit $b_n > c > 0$ für fast alle n folgt

$$a_n b_n > a_n c > 1/\varepsilon$$

für fast alle n. Also konvergiert auch $(a_n b_n)$ uneigentlich gegen ∞. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Aussagen werden *falsch*, wenn man die $\succ$-Bedingungen fallen lässt $_{\text{A-29}}$.

Interpretieren wir die Symbole $\pm\infty$ als Grenzwerte uneigentlich konvergenter Folgen und identifizieren eine reelle Zahl x mit einer konstanten Folge, so rechtfertigt dieser Satz die folgenden Vereinbarungen für das Rechnen mit diesen Symbolen. Für reelle x *definieren* wir demnach

$$\infty + x \coloneqq \infty, \qquad \frac{x}{\infty} = 0, \qquad \infty \cdot x \coloneqq \begin{cases} \infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Die Konventionen für $-\infty$ erhält man durch Ersetzen von ∞ durch $-\infty$.

Nicht erklärt sind dagegen die Ausdrücke

$$\infty - \infty, \qquad \infty \cdot 0, \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

Ihnen lässt sich kein Wert in sinnvoller Weise zuordnen, denn mit geeigneten Folgen kann man *jeden Wert* als Grenzwert realisieren $_{\text{A-33}}$.

Wir erweitern jetzt noch drei Existenzsätze auf uneigentliche Grenzwerte.

28 **Erweiterter Approximationssatz** *In jeder nichtleeren Menge A reeller Zahlen existiert eine Folge (a_n), die gegen* $\sup A$ *konvergiert. Entsprechendes gilt für* $\inf A$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $a = \sup A$ und (ε_n) eine beliebige Nullfolge positiver Zahlen. Aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ existiert zu jedem n ein Element

$$a_n \in U_{\varepsilon_n}(a) \cap A.$$

Dies gilt sowohl für $a < \infty$ als auch für $a = \infty$. Die so gewonnene Folge (a_n) liegt in A, und genau wie zuvor $_{25}$ zeigt man, dass sie gegen a konvergiert. ⟩⟩⟩⟩⟩

29 **Erweiterter Satz von der monotonen Konvergenz** *Jede monotone Folge konvergiert gegen einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist die Folge beschränkt, so kommt der Satz von der monotonen Konvergenz $_{14}$ zur Anwendung. Andernfalls ist die Folge unbeschränkt. Wegen der Monotonie hat sie dann den uneigentlichen Grenzwert ∞ oder $-\infty$. ⟩⟩⟩⟩⟩

30 **Erweiterter Satz von Bolzano-Weierstraß** *Jede reelle Folge besitzt eine eigentlich oder uneigentlich konvergente Teilfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies folgt mit dem Satz von der Existenz monotoner Teilfolgen $_{16}$ und dem erweiterten Satz von der monotonen Konvergenz. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiele* A. $(n!^{n!})$ konvergiert uneigentlich gegen ∞.

B. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, ..)$ besitzt die konvergente Teilfolge $(0, 0, ..)$ und die uneigentlich konvergente Teilfolge $(1, 2, 3, ..)$.

C. $((-1)^n n)$ besitzt die uneigentlich konvergenten Teilfolgen $(2, 4, 6, ..)$ und $(-1, -3, -5, ..)$. ◃

5.7 Normierte Räume und Banachräume

Bisher haben wir Folgen in $\mathbb{R}$ und deren Konvergenz betrachtet. Aber natürlich wollen wir später auch Folgen in $\mathbb{R}^n$ und vielen anderen Räumen betrachten. Um auch dort Begriffe wie Konvergenz und Grenzwert zu definieren, verallgemeinern wir den *Betrag* einer reellen Zahl zur *Norm* eines Vektors in einem *reellen Vektorraum*. Zunächst definieren wir den Begriff des *reellen Vektorraums*.

Definition *Ein reeller Vektorraum E ist eine additive Gruppe zusammen mit einer Verknüpfung*

$$\mathbb{R} \times E \to E, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

genannt skalare Multiplikation, mit folgenden Eigenschaften für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u, v \in E$:

(V-1) $1v = v$,

(V-2) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,

(V-3) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$,

(V-4) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$. ⋊

Additive Gruppe bedeutet hierbei, dass für die Addition in E die Axiome (A1–3) $_{2.1}$ gelten. — Die gesamte Spannweite des Begriffs des Vektorraums wird im Laufe der Zeit klar werden. Im Augenblick reichen uns folgende Beispiele.

▹ A. Das Standardbeispiel ist der $\mathbb{R}^n$ mit der Addition

$$u + v = (u_1, .., u_n) + (v_1, .., v_n) \coloneqq (u_1 + v_1, .., u_n + v_n)$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda v = \lambda(v_1, .., v_n) \coloneqq (\lambda v_1, .., \lambda v_n).$$

Diese hat alle geforderten Eigenschaften.

B. Insbesondere kann auch $\mathbb{R}$ als reeller Vektorraum aufgefasst werden. Allerdings ignoriert man dabei die Körperstruktur.

c. Der Raum $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition komplexer Zahlen und der Multiplikation mit *reellen Zahlen* ist ein reeller Vekorraum. Man kann ihn mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren. ◂

Die Untersuchung von Vektorräumen ist ein wichtiges Thema der linearen Algebra. Für uns reicht im Moment die Definition, das Standardbeispiel und die Tatsache, dass man auf solchen Räumen das Konzept des Betrages zu dem der *Norm* verallgemeinern kann.

Definition *Eine Norm auf einem reellen Vektorraum E ist eine Funktion*

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

(n-1) *Definitheit:* $\|x\| \geqslant 0$, *und* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(n-2) *Positive Homogenität:* $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,

(n-3) *Dreiecksungleichung:* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,

Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ nennt man einen normierten Vektorraum oder kurz normierten Raum. ⋊

Die Bedingungen (n-1)–(n-3) abstrahieren die wesentlichen Eigenschaften der Betragsfunktion, die eine Längenfunktion auf einem beliebigen Vektorraum aufweisen sollte. Zum Beispiel gilt auch die umgekehrte Dreiecksungleichung.

31 **Lemma** *Für jede Norm gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$\|x - y\| \geqslant \big| \|x\| - \|y\| \big| . \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Wie bei die Betragsfunktion $_{2.8}$, nur mit $\|\cdot\|$ anstelle von $|\cdot|$. ⟩⟩⟩⟩

▹ *Beispiele* a. Auf $\mathbb{R}$ wie auf $\mathbb{C}$ definiert der Betrag $|\cdot|$ eine Norm, die sogenannte *Betragsnorm*. Die Normeigenschaften haben wir bereits verifiziert $_{2.7 \,\&\, 4.3}$.

b. Auf dem $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$\|x\|_1 \coloneqq |x_1| + .. + |x_n|$$

die sogenannte *Summennorm* und durch

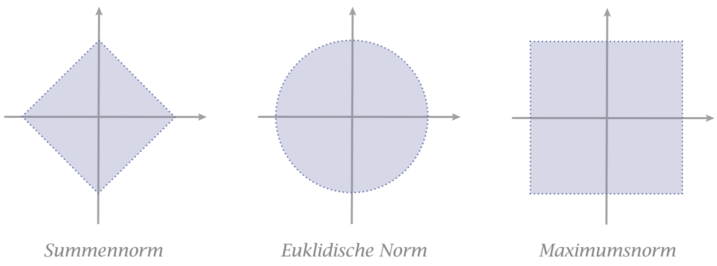
$$\|x\|_\infty \coloneqq \max\{|x_1|, .., |x_n|\}$$

die sogenannte *Maximumsnorm* definiert. Die Normeigenschaften sind leicht zu verifizieren.

c. Die *euklidische* oder *natürliche Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\|_2 \coloneqq \sqrt{|x_1|^2 + .. + |x_n|^2} .$$

Abb 2 Einheitskugeln bezüglich verschiedener Normen



Nach dem Satz des Pythagoras misst sie die ›natürliche‹ Länge des Vektors x. Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung ist allerdings nicht offensichtlich und wird gleich bewiesen werden.

D. Tatsächlich wird für jedes $p \geqslant 1$ durch

$$\|x\|_p \coloneqq \sqrt[p]{|x_1|^p + .. + |x_n|^p}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Das wird uns aber erst später beschäftigen. ◅