9. Vorlesung 2.12.20

Zu jedem $N \geq 1$ gibt es $n \geq N$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Beispiele:

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ hat 0 als GW und als HW.
2. $\left((-1)^n\right)$ hat zwei HW: -1, 1.
3. $(n)_{n \geq 1}$ hat keinen HW.
4. $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n \geq 1}$ hat 3 HW: $1, 0, -1$

gilt für unendlich viele n

$\{ n : A(n) \text{ ist wahr} \}$ ist unendlich

gilt für fast alle n, wenn

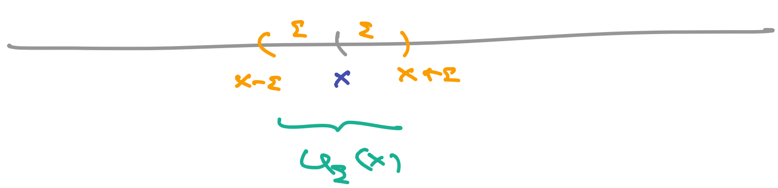
$\{ n : \neg A(n) \}$ ist endlich.

d.h. es gibt ein N, so dass $A(n)$ wahr ist für $n \geq N$.

ε-Umgebung von a:

$$U_\varepsilon(a) = \{ x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon \}$$

$$= (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$



Beispiele:

1. Fast alle Primzahlen sind ungerade.
   alle bis auf endlich viele

2. Unendlich viele natürliche Zahlen sind ungerade, aber nicht fast alle.

3. Fast alle ungeraden Zahlen sind nicht durch 2 teilbar.

Beispiele:

1. $((-1)^n)$ hat genau 2 HW

2. $(n) = (1, 2, 3, \ldots)$ hat keinen HW.

3. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$ hat genau einen HW: 0, ist aber nicht konvergent.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Gibt es Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ mit

$$a_{n_k} \longrightarrow a, \quad k \to \infty,$$

dann liegen in jeder ε-Umgeb. $U_\varepsilon(a)$ fast alle Glieder der Teilfolge.

Also liegen unendlich viele Glieder von (a_n) in $U_\varepsilon(a)$. ✓

$\Longrightarrow$ Sei a HP von (a_n).

Sei ε_n eine beliebige monoton fallende NF:

$$\varepsilon_n \searrow 0 .$$

z.B. $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n!}, \dots$

Rekursive Def. einer Auswahlfolge: $n_1 := 1$,

$$n_k := \min\{ n > n_{k-1} : a_n \in U_{\varepsilon_k}(a) \}, \quad k \geq 2 .$$

Also gilt:

$$\boxed{n_k > n_{k-1}; \qquad a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a).}$$

Bem.: $a_{n_k} \longrightarrow a$, $k \to \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, gibt es $K \geq 1$:

$$0 < \varepsilon_k < \varepsilon, \quad k \geq K.$$

Dann gilt:

$$a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a) \subset U_\varepsilon(a), \quad \underline{k \geq K}.$$

Bsp.:

1. (n^2): $n^2 \longrightarrow \infty$
2. $(n - n^3)$: $a_n \longrightarrow -\infty$.

Für $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(\infty) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$$

Für $\quad 0 < \delta < \varepsilon$:

$$U_\delta(\infty) \subset U_\varepsilon(\infty)$$

Analog:

$$U_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}).$$

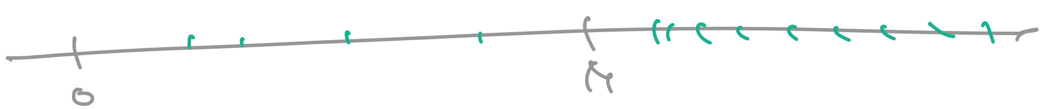
Beachte: $\quad \infty \notin U_\delta(\infty)$.

Es gilt $\quad a_n \longrightarrow \infty \quad$ genau dann, wenn zu jedem $M > 0$ ein $N \geq 1$ gibt:

$= \frac{1}{\varepsilon}$

$$a_n > M, \quad n \geq N.$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_n \in U_\varepsilon(\infty), \quad \varepsilon = \frac{1}{M}.$$



Bsp:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty .$$

Denn sei $r > 0$. Da

$$\frac{r^n}{n!} \longrightarrow 0 , \qquad n \to \infty ,$$

gilt

$$\frac{r^n}{n!} < 1 , \qquad n \ge N$$

$$\iff \quad r^n < n!$$

$$\iff \quad r < \sqrt[n]{n!}$$

D.h.:

$$\sqrt[n]{n!} > r , \qquad n \ge N .$$

$\blacksquare$

Bem: 1. Uneigentliche Grenzw. sind eindeutig.

2. Uneigentlich konv. Folgen sind **nicht** beschränkt. $\blacksquare$

$$a_n \underset{<}{\geq} 0 \iff a_n \underset{<}{>} 0 \quad \text{für fast alle } n$$

(i) $\quad |a_n| \to \infty$, d.h.

$$|a_n| \in U_\varepsilon(\infty)$$

$$\iff |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon$$

Also: $\quad \frac{1}{|a_n|} \to 0.$

(ii) $\quad a_n \to 0 \ \wedge\ \underbrace{a_n \geq 0}_{} \implies \frac{1}{a_n} \to \infty.$

Beweis: wegen $\smile$ sind fast alle $a_n > 0$.

Da $a_n \to 0$:

$$0 < a_n < \varepsilon \quad \text{für fast alle } n$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{a_n}$$

$$\iff \frac{1}{a_n} \in U_\varepsilon(\infty)$$

Also: $\quad \frac{1}{a_n} \to \infty.$

$c \in \mathbb{R}$

(ii) $a_n \to \infty \;\wedge\; b_n \geq c$

$$\Longrightarrow \quad a_n + b_n \to \infty .$$

Beweis: Da $a_n \to \infty$, gilt

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} - c \qquad \text{für fast alle } n$$

Dann

$$a_n + b_n \geq a_n + c > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{—·—}$$

Also, $\quad a_n + b_n \to \infty .$

(iii) $a_n \to \infty \;\wedge\; b_n \geq c > 0$

$$\Longrightarrow \quad a_n b_n \to \infty .$$

Beweis:

$$a_n > \frac{\varepsilon}{c} \qquad \text{für fast alle } n .$$

Weil $b_n \geq c > 0$ für fast alle n:

$$a_n b_n \geq a_n c > \varepsilon \qquad \text{—·—}$$

Also: $\quad a_n b_n \to \infty . \qquad \blacksquare$

Bem: Alle Grenzen werden falsch, wenn die $\geq$-Bedingung fehlt!

Regole coi $\pm\infty$.

∞ vale per successioni tali (a_n) con $a_n \to \infty$

x vale per : $(x)_{n\geq 1}$.

$$\pm\infty + x := \pm\infty$$

$$\frac{x}{\infty} := 0$$

$$\infty \cdot x := \begin{cases} \infty, & x>0 \\ -\infty, & x<0. \end{cases}$$

Forme indeterminate coi:

$\infty - \infty$ $\qquad a_n - b_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}$

$\infty \cdot 0$

$\dfrac{\infty}{\infty}$

Bew.: Sei $a = \sup A$ und (ε_n) beliebige positive Nullfolge.

Approximationssatz: Zu jedem ε_n ex. ein $a_n \in A$:

$$a_n \in U_\varepsilon(a) .$$

Diese Folge (a_n) muss gg. a konvergieren:

$$a_n \longrightarrow a .$$

Bsp.:

1. $(n!^{n!})$ konv. uneigentlich gegen ∞.

2. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ besitzt konvergente Teilfolge $(0, 0, 0, \dots)$ und uneigentlich konv. Teilfolge $(1, 2, 3, \dots)$

3. $((-1)^n n)$ hat zwei uneigentliche konv. TF: $(2, 4, 6, \dots)$, $(-1, -3, -5, \dots)$

Beispiele:

1. $$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

$$u = (u_1, \dots, u_n)$$

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$\lambda v = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$$

2. Speziell $n = 1$:

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ ist ebenfalls ein reeller VR.

3. $$\mathbb{C} = \{ z = x + yi : x, y \in \mathbb{R} \}$$

kann als reeller VR aufgefasst werden:

$$z + w = \dots$$

$$\lambda z = \lambda x + (\lambda y) \cdot i, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$$

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

(N-1) **Definit:** $\|x\| \geq 0$, und

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

(N-2) **Positiv homogen:**

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

(N-3) **Dreiecksungleichung:**

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Es gilt:

$$\|x-y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

Bew.:

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

also,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

$$\underbrace{\|y\| - \|x\|}_{} \leq \|x-y\|$$

$$|\,-\,\cdot\,-\,| \leq \|x-y\|.$$

Bem.: $\|x+y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$

Bsp:

1. $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}\mathbb{R}$

$|\cdot|$ ist Norm auf $\mathbb{R}$

Betragsnorm.

Ebenso auf $\mathbb{C}$

2. $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \dots, x_n)$

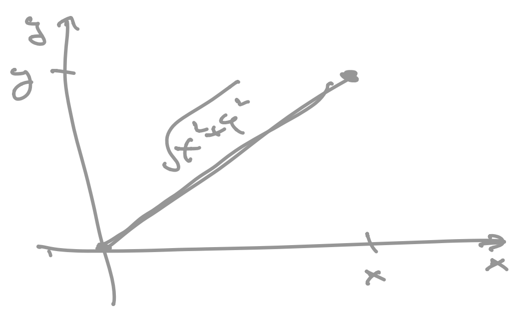
$\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$

Summennorm

$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Maximumnorm.

3.



$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

euklidische Norm:

Einheitskugel:

$$K = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

$\|x\|_1 \leq 1$ $\qquad$ $\|x\|_2 \leq 1$ $\qquad$ $\|x\|_\infty \leq 1$