5.3 Einige wichtige Grenzwerte

10 **Lemma** *Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ gilt* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Fall $q = 0$ ist trivial. Sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist

$$|q| = \frac{1}{1+r}$$

mit einer reellen Zahl $r > 0$. Aufgrund der Bernoullischen Ungleichung [3.4] ist

$$(1+r)^n \geqslant 1 + nr, \qquad n \geqslant 1.$$

Damit erhalten wir

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leqslant \frac{1}{1+nr} \leqslant \frac{1}{nr}.$$

Da auf der rechten Seite eine Nullfolge steht, bildet aufgrund des Majorantenkriterium [5] auch q^n eine Nullfolge. ⟩⟩⟩⟩⟩

11 **Lemma** *Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ und jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0.$$

Somit dominiert q^n jede Potenz von n, wenn $|q| < 1$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $q \neq 0$, und betrachte $a_n \coloneqq n^p\,|q|^n$. Für festes p folgt aus den Grenzwertsätzen [7]

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^p = 1.$$

Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p |q| = |q| < 1.$$

Wählen wir eine beliebige reelle Zahl θ mit $|q| < \theta < 1$, so gibt es also ein $N \geqslant 1$ mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \theta < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Also ist $0 < a_{n+1} < \theta a_n$ für alle $n \geqslant N$. Induktiv folgt daraus

$$0 < a_{N+n} < \theta^n a_N, \qquad n \geqslant N.$$

Hier bildet (θ^n) aufgrund des letzten Lemmas [10] eine Nullfolge. Also [5] bildet auch (a_n) eine Nullfolge. Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

12 **Lemma** *Für jede reelle Zahl a gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Die Fakultät wächst somit schneller als jede Potenz. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Fixiere irgendein θ mit $0 < \theta < 1$. Dann gibt es ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\frac{|a|}{n} \leqslant \theta, \qquad n \geqslant N.$$

Für alle $n \geqslant N$ gilt dann

$$0 < \frac{|a|^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a|}{k} \leqslant \prod_{k=1}^{N} \frac{|a|}{k} \cdot \prod_{k=N+1}^{n} \theta \leqslant \left(\frac{|a|}{N\theta}\right)^N \theta^n.$$

Die rechte Seite bildet eine Nullfolge bezüglich n, und wir sind fertig. ⟩⟩⟩⟩⟩

Im nächsten Lemma antizipieren wir die Existenz und Monotonie der n-ten Wurzelfunktion auf den positiven reellen Zahlen ??.

13 **Lemma** *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $0 < \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$, und daher 11

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0.$$

Also gibt es ein $N \geqslant 1$, so dass

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Dies ist äquivalent mit $n < (1+\varepsilon)^n$, oder

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da andererseits auch $1 \leqslant \sqrt[n]{n}$ für alle $n \geqslant 1$, folgt hieraus

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

5.4 Existenzsätze

Bisher gingen wir davon aus, dass wir den Grenzwert einer konvergenten Folge kennen – schließlich spielt dieser eine zentrale Rolle in der Definition ihrer Konvergenz. Tatsächlich sieht man jedoch vielen konvergenten Folgen *nicht an*, welchen Grenzwert sie haben. So ist die Folge der reellen Zahlen

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .. + \frac{1}{n!}$$

konvergent [15], auch wenn wir ihren Grenzwert nicht kennen.

Es stellt sich deshalb die Frage, ob man nur durch Betrachten einer Folge selbst auf deren Konvergenz und die Existenz eines Grenzwertes schließen kann. Am einfachsten ist diese Frage für *monotone* Folgen zu beantworten.

■ Monotone Folgen

Definition *Eine reelle Folge (a_n) heißt monoton steigend, falls*

$$a_n \leqslant a_{n+1}$$

für alle n gilt. Sie heißt streng monoton steigend, falls sogar

$$a_n < a_{n+1}$$

für alle n gilt. Analog sind monoton fallend und streng monoton fallend definiert. Schließlich heißt eine Folge (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton steigt oder fällt. ⋊

Konvergiert eine Folge (a_n) *monoton* gegen ihren Grenzwert a, so schreibt man auch genauer $a_n \nearrow a$ für monoton steigende und $a_n \searrow a$ für monoton fallende Folgen.

14 **Satz von der monotonen Konvergenz** *Eine monotone Folge (a_n) ist konvergent genau dann, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall gilt*

$$\lim a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

für monoton steigende Folgen. Entsprechend gilt $\lim a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ für monoton fallende Folgen. ⋊

$\Rightarrow$ *Jede* konvergente Folge ist beschränkt [4].

$\Leftarrow$ Sei umgekehrt etwa (a_n) monoton steigend und beschränkt. Dann ist die Menge $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt, und es existiert die reelle Zahl

$$a = \sup A < \infty.$$

Aufgrund des Approximationssatzes [2.12] existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element $a_N \in A$ mit $a - \varepsilon < a_N \leqslant a$. Aufgrund der Monotonie der Folge (a_n) und der Definition von a als obere Schranke aller a_n gilt dann auch

$$a - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant a, \qquad n \geqslant N.$$

Das aber bedeutet, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt also $\lim a_n = a = \sup A$.

Bemerkung Die Existenz des Grenzwertes folgt somit aus der Existenz eines Supremums, und damit aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Im Körper $\mathbb{Q}$ gilt der Satz *nicht* [A-5].

15 *Beispiel* Die Folge der Summen

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + .. + \frac{1}{n!}$$

ist offensichtlich streng monoton steigend. Außerdem ist zum Beispiel

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}, \qquad k \geqslant 1.$$

Somit gilt [3.13]

$$e_n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-q^n}{1-q} \leqslant \frac{1}{1-q} = 2, \qquad q = \frac{1}{2}.$$

Die Folge ist also beschränkt, und es existiert die *Eulersche Zahl*

$$\mathrm{e} \coloneqq \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \eqqcolon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

wobei $\mathrm{e} \leqslant 3$ aufgrund unserer groben Abschätzung.

Teilfolgen

Nicht jede reelle Folge ist monoton. Man kann aber immer eine monotone *Teilfolge* auswählen, indem man nur einen Teil der Folgenglieder betrachtet und die übrigen ignoriert.

Definition *Ist $(a_n)_n$ eine Folge in einer Menge X und $(n_k)_k$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen, so heißt*

$$(a_{n_k})_k = (a_{n_1}, a_{n_2}, ..)$$

eine Teilfolge von (a_n). Die Folge $(n_k)_k$ selbst heißt eine Auswahlfolge. $\rtimes$

Eine Teilfolge ist also die Komposition einer Folge $a\colon \mathbb{N} \to X$ mit einer streng monoton steigenden Folge $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, also die Folge

$$a \circ \varphi = (a_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1} = (a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, ..).$$

Jede Folge besitzt übrigens überabzählbar viele Teilfolgen A-40.

Beispiele A. $(1/n^2)$ und (2^{-n}) sind Teilfolgen von $(1/n)$.

B. Die Folge $(0,1,0,2,0,3,0,..)$ besitzt unter anderem die beiden Teilfolgen $(0,0,0,..)$ und $(1,2,3,..)$.

C. Die Folge $((-1)^n)$ besitzt die beiden Teilfolgen

$$(1,1,..), \qquad (-1,-1,..),$$

und noch viele andere, zum Beispiel $((-1)^{k^3})$ oder $((-1)^{k!})$.

Jede Teilfolge einer *konvergenten* Folge ist offensichtlich ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert. Interessanter ist die Frage, ob *jede Folge* eine konvergente Teilfolge besitzt. Die Antwort gibt der Satz von Bolzano-Weierstraß 17, der auf folgender Bemerkung basiert.

16 **Lemma** *Jede reelle Folge (a_n) enthält eine monotone Teilfolge.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨ Betrachte die Menge

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant a_m \text{ für alle } m \geqslant n\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} : a_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, ..\}\}. \end{aligned}$$

Ist A *unendlich*, so bildet eine streng monotone Abzählung von A eine Auswahlfolge (n_k) mit der Eigenschaft, dass

$$a_{n_k} \geqslant a_{n_{k+1}}.$$

Also ist (a_{n_k}) monoton *fallend*. Ist dagegen A *endlich*, so ist $\max A$ endlich. Zu jedem $n > \max A$ existiert dann ein $m > n$ mit

$$a_n < a_m,$$

denn andernfalls wäre ja $n \in A$. Auf diese Weise können wir induktiv eine Auswahlfolge (n_k) konstruieren, so dass

$$a_{n_k} < a_{n_{k+1}}.$$

Wir erhalten somit eine streng monoton *steigende* Teilfolge (a_{n_k}). ⟫⟫⟫

Bemerkung Der Satz behauptet *nicht*, dass man immer je eine monoton fallende und eine steigende Teilfolge auswählen kann. Ist zum Beispiel die Ausgangsfolge monoton steigend, so ist auch jede Teilfolge monoton steigend. ⊸

17 **Satz von Bolzano-Weierstraß** *Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.* ⋊

⟪⟪⟪ Mit dem vorangehenden Lemma können wir aus jeder Folge eine monotone Teilfolge auswählen. Diese ist beschränkt, wenn die Originalfolge beschränkt ist. Also ist sie mit dem Satz von der monotonen Konvergenz $_{14}$ konvergent. ⟫⟫⟫

Beispiele A. $((-1)^n)$ besitzt unter anderem die konvergenten Teilfolgen $(1, 1, ..)$ und $(-1, -1, ..)$.

B. Jede Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Es gibt sogar zu jeder reellen Zahl $x \in [0, 1]$ eine Teilfolge, die gegen x konvergiert.

C. Die monotone Folge $(1, 2, 3, ..)$ besitzt *keine* konvergente Teilfolge. Sie ist aber auch nicht beschränkt. ◅

Cauchyfolgen

Wann aber ist eine beschränkte Folge auch ohne Auswahl einer Teilfolge konvergent? Die Untersuchung dieser Frage führt zum Begriff der *Cauchyfolge*.

Definition *Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ gibt, so dass*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad n, m \geqslant N. \quad ⋊$$

In einer Cauchyfolge wird der Abstand *aller Folgenglieder untereinander* also beliebig klein, wenn deren Indizes nur groß genug sind.

18 *Beispiele* A. $((-1)^n)$ bildet *keine* Cauchyfolge, denn

$$|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2, \qquad n \geqslant 1.$$

B. Für die Summen e_n von Beispiel 15 gilt für alle $m \geqslant n \geqslant 1$

$$|e_n - e_m| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da dies für alle $m \geqslant n$ gilt und die rechte Seite eine Nullfolge in n bildet, ist (e_n) eine Cauchyfolge. ◅

Weitere Beispiele für Cauchyfolgen sind an dieser Stelle nicht nötig. Denn es gilt ganz allgemein:

19 **Satz** *Jede konvergente reelle Folge ist eine Cauchyfolge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N.$$

Für alle $n, m \geqslant N$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon.$$

Somit ist (a_n) eine Cauchyfolge. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Es *reicht nicht*, nur die Abstände $|a_{n+1} - a_n|$ zu betrachten. So bilden die Summen

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n}$$

eine streng monoton steigende Folge, und es gilt

$$|h_{n+1} - h_n| = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Trotzdem ist diese Folge divergent $_{6.4}$. ⊸

Uns interessiert natürlich vor allem die Frage, ob auch umgekehrt eine Cauchyfolge immer konvergiert. Dazu zunächst zwei Teilergebnisse.

20 **Lemma 1** *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies wird genauso bewiesen wie der Beschränktheitssatz $_{4}$. Nur wählt man statt des Grenzwertes a zum Beispiel das Folgenglied a_N. ⟩⟩⟩⟩⟩

21 **Lemma 2** *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist auch die Gesamtfolge konvergent, und die Grenzwerte stimmen überein.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge der Cauchyfolge (a_n) und a deren Grenzwert. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund der Cauchyfolgen-Eigenschaft ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2, \qquad n, m \geqslant N.$$

Aufgrund der Konvergenz der Teilfolge existiert außerdem ein $\tilde{N} \geqslant 1$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2, \qquad n_k \geqslant \tilde{N}.$$

Wählen wir ein solches $n_k \geqslant \max(N, \tilde{N})$, so folgt

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Konvergenz von (a_n) gegen a. ⟫⟫⟫

Zusammen mit dem Satz von Bolzano-Weierstrass folgt nun das Konvergenzkriterium von Cauchy, das ohne Kenntnis des Grenzwertes auskommt.

22 **Cauchykriterium** *Eine reelle Folge ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge bildet.* ⋊

⟪⟪⟪ $\Rightarrow$ Siehe oben 19.

$\Leftarrow$ Eine reelle Cauchyfolge (a_n) ist beschränkt 20. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 17 besitzt sie also eine konvergente Teilfolge. Dann 21 ist aber auch die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. ⟫⟫⟫

23 ▹▸ *Beispiel* Die durch

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - .. + \frac{(-1)^n}{n!}$$

definierte Folge (d_n) ist nicht monoton, doch für $m > n \geqslant 1$ gilt

$$|d_n - d_m| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

mit derselben Abschätzung wie in Beispiel 18. Also ist auch (d_n) eine Cauchyfolge und damit konvergent. Übrigens gilt

$$\lim d_n = \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\lim e_n}.$$

Dies ergibt sich aus der Potenzreihendarstellung der Exponenzialfunktion. ◂◃