8. Vorlesung 27. 11. 20

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 , \qquad \text{falls } |q| < 1 .$$

<u>Beweis</u>: Sei oBdA $q \neq 0$, oBdA

$$0 < |q| < 1 .$$

Dann

$$|q| = \frac{1}{1+r} , \qquad \text{mit } r > 0 .$$

Bernoullische Ungleichung:

$$(1+r)^n \geq 1 + nr , \qquad n \geq 1 .$$

Damit

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr}$$

$$\leq \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Also gilt

$$|q^n| \longrightarrow 0 , \qquad n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad \blacksquare$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0 \quad , \quad \text{für } |q|<1,\ p\in\mathbb{Z} \text{ beliebig.}}$$

Für $p>0$: $n^p \to \infty$, $q^n \to 0$

"q^n gewinnt gegen Potenz von n".

Beweis: Sei $q\neq 0$. Betrachte dann

$$\boxed{a_n = n^p |q|^n} \ . \ \to 0 \ .$$

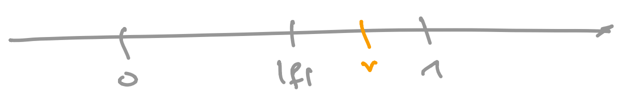
Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} |q| = (*)$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \to 1$$

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^p |q| = |q| < 1 .$$

Wählen wir also eine beliebige reelle Zahl r mit $|q| < r < 1$:



So gibt es $N \geq 1$, so dass für $n \geq N$

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1, \qquad n \geq N.}$$

Also: $a_{n+1} < r\, a_n, \qquad n \geq N.$

Generell folgt:

$$\underbrace{a_{N+n}} < \underbrace{r^n a_N}_{\to 0}, \qquad n \geq N$$

Also

$$a_{N+n} \to 0, \qquad n \to \infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \text{für jede } a \in \mathbb{R}.}$$

zB: $a \gg 1$:

$$\underbrace{a^n}_{\to \infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

„Fakultät wächst schneller als jede Potenz".

Beweis: Wähle $0 < r < 1$.

Dann gibt es ein $N \geq 1$:

$$\frac{|a|}{n} \leq r \quad , \quad n \geq N.$$

Für $n \geq N$ gilt dann

$$0 < \frac{|a|^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a|}{k} = \prod_{k=1}^{N} \underbrace{\frac{|a|}{k}}_{\leq |a|} \cdot \prod_{k=N+1}^{n} \underbrace{\frac{|a|}{k}}_{\leq r}$$

$$\leq \underbrace{|a|^N \cdot \underbrace{r^{n-N}}_{\to 0 \text{ für } n \to \infty}}_{\to 0}$$

Also:

$$\frac{|a|^n}{n!} \longrightarrow 0 \quad , \quad n \to \infty.$$

$$\boxed{\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 , \quad n\to\infty.}$$

$a>0$: $\sqrt[n]{a} = w$: $w^n = a$.

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$0 < \frac{1}{1+\varepsilon} < 1 ,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n = 0$$

Also ex $N \geq 1$:

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 , \quad n \geq N$$

$$\Longleftrightarrow \quad n < (1+\varepsilon)^n$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 \leq \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon , \quad n \geq N$$

Also : $\left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n \geq \frac{N}{2}$.

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt daraus:

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$ ∎

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

$a_n \le a_{n+1}$, $n \ge 1$

monoton steigend

$a_n < a_{n+1}$

streng — " — .

$a_n \ge a_{n+1}$ monoton fallend

$>$ streng — " — .

Ist (a_n) konvergent mit Gw a und monoton steigend:

$a_n \nearrow a$.

monoton fallend: $a_n \searrow a$.

Beweis: $\Rightarrow$ Klar.

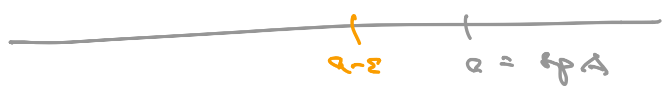
$\Leftarrow$ Sei (a_n) monoton $\uparrow$ und beschränkt.

Dann
$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$ beschränkt

Also ex.
$$a = \sup A.$$

Zeige: $a = \lim a_n$:

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $a - \varepsilon < a = \sup A$



Approxim. Satz: es ex. $a_N \in A$ mit

$$a - \varepsilon < a_N \le a$$

wegen Monotonie: für $n \ge N$:

$$a - \varepsilon < a_N \le a_n \le a, \quad n \ge N$$

Also gilt:
$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \ge N.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ möglich ist:

$$\lim a_n = a.$$

Bsp:

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$e_n < e_{n+1} \quad , \quad n \geq 0 .$$

Beschränkt: z.z.:

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad , \quad k \geq 1.$$

Somit gilt

$$e_n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \qquad q = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1 - \cancel{q^n}}{1-q}$$

$$\leq \frac{1}{1-q} = 2 .$$

Also:

$$e_n \leq 3 \quad , \quad n \geq 0.$$

Also existiert:

$$\lim_{n \to \infty} e_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e .$$

Eulersche Zahl.

Teilfolge:

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{streng monoton steigend}$$

Dann

$$a \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

Folge in X:

$$(a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, \dots)$$

$$= (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots) =: (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Beispiele:

1. $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$

   Teilfolgen: $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, ...

2. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$

   Teilfolgen:

   $(0, 0, 0, \dots)$

   $(1, 2, 3, \dots)$

3. $\left((-1)^n\right)_{n \geq 1} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

   Teilfolgen: $(-1, -1, -1, \dots)$

   $(1, 1, 1, \dots)$

Bem.: Die Menge der Teilfolgen einer Folge ist überabzählbar.

Beweis: Fall reelle Folge. Betrachte:

$$A := \{ n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_m \text{ für alle } m \geq n \}$$

$$= \{ n \in \mathbb{N} : a_n = \sup \{ a_n, a_{n+1}, \dots \} \}$$

Fall A unendlich:

$$A = \{ n_1 < n_2 < n_3 < \dots \}$$

und

$$a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}.$$

Also: $(a_{n_k})_{k \geq 1}$ monoton fallend.

Fall A endlich: dann

$$\sup A = \max A < \infty.$$

Dann gilt für $n > \max A$:

es gibt $m > n$ mit

$$a_n < a_m$$

Konstruiere rekursiv $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

$$a_{n_k} < a_{n_{k+1}}, \quad k \geq 1.$$

Damit eine monoton steigende Teilfolge. $\blacksquare$

Beweis: Sei (x_n) beschränkte reelle Folge.

Dann besitzt (x_n) eine monotone TF.

Diese ist beschränkt,

also ist sie auch konvergent. $\square$

Beispiele:

1. $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

   konv. Teilfolge $(-1, -1, -1, \dots)$

   $(1, 1, \dots)$

2. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ abzählbar, also Folge $(q_n)_{n \geq 1}$.

   Dann ex. zu jedem $x \in [0,1]$ eine Teilfolge, die gegen x konvergiert.

3. $(1, 2, 3, \dots) = (n)_{n \geq 1}$ besitzt keine konv. TF, da sie ist auch nicht beschränkt. ☺

Beispiele:

1. $$((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$

Keine CF, denn

$$|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2, \qquad n \geq 1.$$

2. $$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$m \geq n > 1$:

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

für $m \geq n > 1$.

$\varepsilon > 0$ gegeben: N so, dass $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$.

Dann gilt: $m, n \geq N$:

$$|s_n - s_m| \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon.$$

Beweis: Sei (a_n) konv., $a = \lim a_n$.
Dann ex. zu $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N.$$

Für $n, m \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) - (a_m - a)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Also CF. ∎

Beispiel:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

s_n streng monoton steigend, und

$$|s_{n+1} - s_n| = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Aber: $s_n \to \infty, \quad n \to \infty.$

Beweis: Sei (a_n) CF, (a_{n_k}) Teilfolge mit Grenzwert a.

Beh.: $\lim a_n = a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. wegen CF ein $N \geq 1$:

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n, m \geq N.$$

Für (a_{n_k}) gilt: es ex. $K \geq 1$:

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geq K.$$

Wähle $n_k \geq N$: ~~Dann~~ für $n \geq N$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig .... $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ∎

Beweis: "$\Rightarrow$" S.o.

"$\Leftarrow$" Sei (a_n) CF.

Dann ist (a_n) beschränkt.

BW: Es ex. eine konv. TF (a_{n_k}).

Damit konv. auch die gesamte Folge. □

Beispiel:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \mp \dots$$

ist nicht monoton ...

Aber:

$$|a_m - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \underset{\text{S.o.}}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

für $m \geq n \geq N(\varepsilon)$.

Also CF.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} = \frac{1}{\lim e_n}.$$