5 Folgen

Eine *Folge* in einer beliebigen Menge X ist eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to X,$$

die man üblicherweise durch Aufzählung ihrer Funktionswerte in der Form

$$(f_1, f_2, f_3, ..) = (f_n)_{n \geqslant 1} = (f_n)_n = (f_n)$$

angibt. Man spricht von *Zahlenfolgen*, wenn f eine Abbildung nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist und alle Folgenglieder demzufolge reelle oder komplexe Zahlen sind.

An einer Zahlenfolge interessiert uns vor allem ihr *asymptotisches Verhalten* – also wie sie sich verhält, wenn der Folgenindex gegen Unendlich strebt. Gibt es zum Beispiel einen Punkt, dem sich die Folge ›immer weiter annähert‹ und den man als ihren *Grenzwert* bezeichnen könnte?

Die reelle Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, .., \frac{1}{n}, ..\right)$$

beispielsweise scheint gegen 0 zu streben, denn die Folgenglieder sind positiv, werden aber immer kleiner. Dagegen hat die reelle Folge

$$((-1)^n)_{n \geqslant 1} = (-1, 1, -1, 1, -1, ..)$$

wohl keinen Grenzwert, da sie ständig zwischen 1 und -1 wechselt.

Der Begriff des Grenzwertes ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Analysis. Er präzisiert die intuitive Vorstellung, dass eine Folge einem bestimmten Punkt ›beliebig nahe kommt‹. Auf ihm basieren die Konzepte der Stetigkeit sowie der Differenziation und Integration.

5.1 Grenzwerte reeller Folgen

Wir betrachten zunächst *reelle Folgen*, also Folgen reeller Zahlen. Von zentraler Bedeutung ist der Begriff der *konvergenten Folge* und ihres *Grenzwertes*.

Definition *Eine Folge* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *reeller Zahlen heißt* *konvergent*, *wenn es eine reelle Zahl* a *gibt, so dass zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \geqslant 1$ *existiert mit der Eigenschaft, dass*

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Diese Zahl a *heißt der* *Grenzwert* *der Folge, geschrieben*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

und man sagt, (a_n) *konvergiert gegen* a *für* n *gegen Unendlich.* ⋊

Andere Schreibweisen hierfür sind

$$a_n \to a, \qquad n \to \infty,$$

oder auch nur kurz $a_n \to a$ oder $\lim a_n = a$.

Die in der Definition geforderte Eigenschaft wird als *ε-N-Test* bezeichnet. Zu jeder *Fehlerschranke* $\varepsilon > 0$ muss es eine *Indexschranke* $N \geqslant 1$ geben, jenseits derer *alle* Folgenglieder einen Abstand kleiner als ε von a haben:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Umgekehrt bedeuet dies, dass *höchstens endlich viele* Folgenglieder einen Abstand größer oder gleich ε von a haben, und zwar allenfalls $a_1, .., a_{N-1}$.

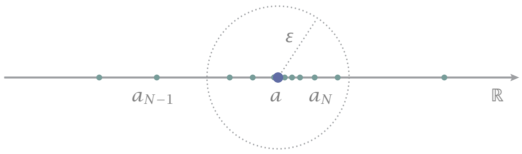
Im ε-N-Test hängt die Schranke N im Allgemeinen von ε ab, weshalb man auch oft $N(\varepsilon)$ schreibt. Es ist aber nicht erforderlich, diese Abhängigkeit *explizit* anzugeben, oder das bestmögliche N zu suchen. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $N(\varepsilon)$ *gibt*.

Im ε-N-Test kommt es auch auf große ε nicht an. Es genügt, hinreichend *kleine* ε zu betrachten. Gilt der ε-N-Test für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ mit irgendeinem $\varepsilon_0 > 0$, so gilt er auch für *alle* $\varepsilon > 0$.

Bei Konvergenzfragen kommt es auch nicht auf die ersten Folgenglieder an. Es spielt keine Rolle, ob die Indizierung einer Folge bei 0, 1, oder irgend einer anderen natürlichen Zahl beginnt. Daher kann man auf eine explizite Angabe im Allgemeinen verzichten, wenn es nur um den Grenzwert geht.

▹ *Triviales Beispiel* Jede *konstante* reelle Folge $(a)_{n\geqslant 1}$ ist konvergent mit Grenzwert a. — Hier ist also $a_n = a$ für alle $n \geqslant 1$. ◃

Abb 1 ε-N-Test



1 ⊳ *Beispiel* Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \quad \triangleleft$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert nach dem Prinzip des Archimedes $_{3.9}$ eine natürliche Zahl $N > 1/\varepsilon$. Mit $1/N < \varepsilon$ gilt dann für alle $n \geqslant N$ ebenfalls

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Somit gilt auch

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Damit haben wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $N \geqslant 1$ gefunden. ⟩⟩⟩⟩⟩

Der Begriff der konvergenten Folge lässt sich auf den Begriff der *Nullfolge* zurückführen, also einer konvergenten Folge mit Grenzwert 0.

2 **Notiz** *Eine reelle Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert a genau dann, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge bildet.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Gilt $a_n \to a$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$ so, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Dies ist aber äquivalent mit

$$|(a_n - a) - 0| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N,$$

also zu der Aussage, dass $(a_n - a)$ gegen 0 konvergiert. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Eindeutigkeit und Beschränktheit

Die Definition des Grenzwertes suggeriert, dass eine konvergente Folge nur *einen* Grenzwert haben kann. Auch wenn dies offensichtlich erscheint, erfordert es einen Beweis.

3 **Eindeutigkeitssatz** *Der Grenzwert einer konvergenten reellen Folge ist eindeutig bestimmt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, (a_n) hat zwei verschiedene Grenzwerte $\tilde{a}$ und $\hat{a}$. Dann ist $\varepsilon \coloneqq |\tilde{a} - \hat{a}| > 0$. Zu $\varepsilon/2$ existieren ein $\tilde{N} \geqslant 1$ und $\hat{N} \geqslant 1$, so dass

$$|a_n - \tilde{a}| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant \tilde{N},$$
$$|a_n - \hat{a}| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant \hat{N}.$$

Mit irgendeinem $N \geqslant \max(\tilde{N}, \hat{N})$ folgt hieraus mit der Dreiecksungleichung

$$|\tilde{a} - \hat{a}| \leqslant |\tilde{a} - a_N| + |a_N - \hat{a}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\varepsilon = |\tilde{a} - \hat{a}|$. ⟩⟩⟩⟩⟩

4 **Beschränktheitssatz** *Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt. Das heißt, es gibt ein reelle Zahl $M \geqslant 0$, so dass $|a_n| \leqslant M$ für alle n.* ⋊

Mit anderen Worten, eine reelle Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ist beschränkt, wenn die Menge ihrer Folgenglieder $\{a_n : n \geqslant 1\}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ ist.

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist (a_n) konvergent mit Grenzwert a, so gibt es zum Beispiel zu $\varepsilon = 1$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|a_n - a| < 1, \qquad n \geqslant N.$$

Also gilt mit der Dreiecksungleichung auch

$$|a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < |a| + 1, \qquad n \geqslant N.$$

Wählen wir jetzt

$$M = \max\{|a_1|, .., |a_{N-1}|, |a| + 1\},$$

so gilt $|a_n| \leqslant M$ für *alle* n. Somit ist die Folge (a_n) beschränkt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Definition *Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.* ⋊

▹ *Beispiele* A. Die reelle Folge $((-1)^n)_{n \geqslant 1}$ ist divergent.
B. Jede unbeschränkte Folge ist divergent $_4$.
C. Jede Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist divergent $_{\text{A-4}}$. ◃

Die Beispiele zeigen insbesondere, dass aus der Beschränktheit einer Folge allein nicht deren Konvergenz folgt. Wir werden jedoch bald sehen, dass jede *beschränkte monotone* Folge konvergiert, und dass jede beschränkte Folge eine *konvergente Teilfolge* besitzt.

5.2 Grenzwertsätze

Um Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, verwendet man den ε-N-Test eher selten. Meistens greift man auf bereits bekannte Grenzwerte zurück und wendet *Grenzwertsätze* an.

Wir bemerkten bereits, dass (a_n) gegen a genau dann konvergiert, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge bildet [2]. Letzteres zeigt man meist durch Vergleich mit einer bekannten Nullfolge.

5 **Majorantenkriterium** *Gilt $|a_n - a| \leqslant |b_n|$ für alle n mit einer Nullfolge (b_n), so ist die Folge (a_n) konvergent mit Grenzwert a.*

Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|b_n| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Also ist $|a_n - a| \leqslant |b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Somit konvergiert (a_n) gegen a.

Beispiel Es gilt $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$. Denn

$$\left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n},$$

und die rechte Seite bildet eine Nullfolge [1].

Nullfolgen haben die nützliche Eigenschaft, ›robust‹ zu sein. Multiplizieren wir sie gliedweise mit einer Folge, von der wir nur wissen, dass sie *beschränkt* ist, so erhalten wir trotzdem wieder eine Nullfolge.

6 **Nullfolgensatz** *Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, so ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.*

Nach Voraussetzung existiert ein $M > 0$, so dass

$$|b_n| \leqslant M$$

für alle n. Da (a_n) eine Nullfolge bildet, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N, so dass

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \qquad n \geqslant N.$$

Dann aber gilt

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Da für alle $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, gilt $a_n b_n \to 0$.

▹ *Beispiele* A. Ist (b_n) eine beliebige beschränkte Folge, so ist (b_n/n) eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0.$$

B. Das Produkt der Nullfolge $(1/n)$ mit der unbeschränkten Folge (n^2) ist die unbeschränkte Folge (n) und damit *divergent*. Auf die Beschränktheit der Folge (b_n) kann im Nullfolgensatz also nicht verzichtet werden. ◃

Grenzwertgleichungen

Es folgen die klassischen Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient konvergenter Folgen.

7 **Satz** *Sind die reellen Folgen (a_n) und (b_n) konvergent mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so konvergieren auch $(|a_n|)$, $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$, und es gilt*

$$|a_n| \to |a|, \qquad a_n + b_n \to a + b, \qquad a_n b_n \to ab.$$

Ist außerdem $b \neq 0$, so existiert a_n/b_n für alle hinreichend großen n, und

$$a_n/b_n \to a/b.$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨ *Betrag:* Aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung $_{2.8}$ gilt

$$\big|\, |a_n| - |a| \,\big| \leqslant |a_n - a|.$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge bildet, folgt die Behauptung $_5$.

Summe: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren ein $N_a \geqslant 1$ und ein $N_b \geqslant 1$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N_a,$$
$$|b_n - b| < \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N_b.$$

Für $n \geqslant N = \max\{N_a, N_b\}$ gilt dann

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, gilt also $a_n + b_n \to a + b$.

Produkt: Es ist

$$a_n b_n - ab = (a_n - a) b_n + (b_n - b) a.$$

Nach Voraussetzung sind $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ Nullfolgen, und nach dem Beschränktheitssatz $_4$ ist (b_n) beschränkt. Also sind aufgrund des Nullfolgensatzes $_6$ auch $(a_n - a)b_n$ und $(b_n - b)a$ Nullfolgen. Mit dem eben Bewiesenen ist auch deren Summe eine Nullfolge, und damit auch $(a_n b_n - ab)$. Also gilt $a_n b_n \to ab$.

Quotient: Aufgrund der eben bewiesenen Produktregel genügt es zu zeigen, dass $1/b_n \to 1/b$. Nach Voraussetzung ist $b \neq 0$ und damit $\varepsilon = |b|/2 > 0$. Dazu existiert ein $N \geqslant 1$, so dass

$$|b_n - b| < \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Dann aber ist

$$|b_n| \geqslant |b| - \varepsilon = \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Somit ist $(1/b_n)_{n \geqslant N}$ *beschränkt* [1]. Schreiben wir jetzt

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = (b - b_n)\frac{1}{b_n b},$$

so ist die rechte Seite das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge, also wieder eine Nullfolge 6. Also gilt $1/b_n \to 1/b$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt somit

$$\lim(a_n * b_n) = \lim a_n \, * \, \lim b_n$$

für $* \in \{+, \cdot, :\}$, im Fall der Division allerdings nur, wenn $\lim b_n \neq 0$. Man sagt, die Grenzwertbildung *vertauscht* mit den arithmetischen Operationen. Später werden wir dies als die *Stetigkeit* dieser Operationen auf $\mathbb{R}$ interpretieren.

▷ *Beispiele* A. Bevor man Grenzwertgleichungen anwenden kann, sind oft Umformungen nötig, um konvergente Folgen zu erhalten. Ein typisches Beispiel sind Quotienten, deren Zähler und Nenner für sich betrachtet divergieren. So gilt

$$\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \to 1.$$

B. Allgemein kürzt man rationale Ausdrücke durch die höchste Potenz, die in Zähler und Nenner auftritt:

$$\frac{n}{n^2 + 2n + 3} = \frac{1/n}{1 + 2/n + 3/n^2} \to \frac{0}{1} = 0,$$

und

$$\frac{(n^2+1)(n-3)}{(2n+1)^3} = \frac{(1 + 1/n^2)\,(1 - 3/n)}{(2 + 1/n)^3} \to \frac{1 \cdot 1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$ ◁

Grenzwertungleichungen

Mindestens ebenso wichtig wie Gleichungen für Grenzwerte sind *Ungleichungen*. Das nächste Lemma bildet hierfür die Grundlage.

[1] Da es auf die ersten Folgenglieder nicht ankommt, fordern wir nicht explizit, dass *alle* b_n von Null verschieden sind.

8 **Lemma** *Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge und b eine reelle Zahl. Gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung*

$$a_n \leqslant b + \varepsilon$$

für unendlich viele n, so ist

$$\lim a_n \leqslant b. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $a = \lim a_n$. Wäre $a > b$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $a - \varepsilon \geqslant b + \varepsilon$, und dazu ein $N \geqslant 1$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Insbesondere gilt dann

$$a_n > a - \varepsilon \geqslant b + \varepsilon, \qquad n \geqslant N.$$

Dann aber gilt $a_n \leqslant b + \varepsilon$ nicht mehr für unendlich viele n – ein Widerspruch. Also ist $a \leqslant b$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Typischerweise gilt $a_n \leqslant b + \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$ mit einem hinreichend großen N. Aber dies wird im Beweis nicht benötigt. ⊸

9 **Grenzwertungleichung** *Die reellen Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent. Gilt $a_n \leqslant b_n$ für unendlich viele n, so gilt auch*

$$\lim a_n \leqslant \lim b_n. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $b = \lim b_n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \geqslant 1$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geqslant N$. Insbesondere gilt dann $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$. Folglich gibt es unendlich viele n mit der Eigenschaft, dass

$$a_n \leqslant b_n < b + \varepsilon.$$

Mit dem vorangehenden Lemma folgt daraus $\lim a_n \leqslant b = \lim b_n$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Achtung: Selbst wenn $a_n < b_n$ für *alle* n gelten sollte, folgt daraus *nicht*, dass die strikte Ungleichung auch für die Grenzwerte gilt. Für $a_n = -1/n$ und $b_n = 1/n$ gilt offensichtlich

$$a_n < b_n, \qquad n \geqslant 1,$$

aber

$$\lim a_n = 0 = \lim b_n.$$

Strikte Ungleichungen überleben einen Grenzübergang im Allgemeinen nicht, und Grenzwertungleichungen schließen immer auch den Fall der Gleichheit ein.