7. Vorlesung 24. 11. 20

X

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$n \longmapsto f(n) = f_n$$

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_n)_{n \geq 1} = (f_n)_n = (f_n)$$

Zahlenfolgen: $\boxed{X = \mathbb{R} \qquad X = \mathbb{C}}$

$$(a_n)_{n \geq 1} \quad , \quad (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Bsp 1:

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$\longrightarrow 0$$

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \geq 0} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

$$\longrightarrow 0$$

$$\left((-1)^n\right)_{n \geq 1} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$

kein Grenzwert.

Def: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolge.

Die heißt **konvergent**, wenn es einen Grenzwert a gibt. Definiert man folgt:

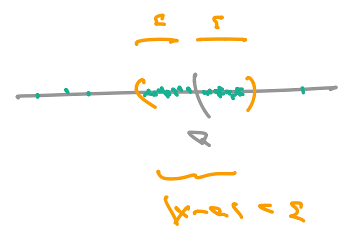
ε-N-Test

Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $N \geq 1$ mit:

$$|a_n - a| < \varepsilon \,, \quad n \geq N.$$

Dafür schreibt man

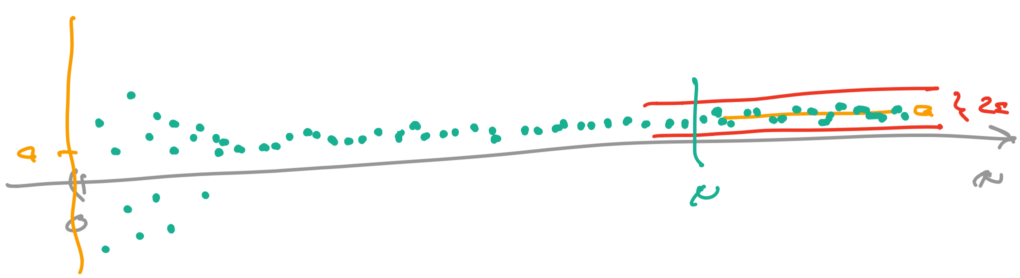
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$



Schreibweise:

$$a_n \longrightarrow a \,, \quad n \to \infty$$

$$\lim a_n = a \,.$$



Zum ε-N-Test:

1. N hängt z. B. von ε ab:

$$N = N(\varepsilon)$$

2. Es kommt nicht darauf an, N optimal ..

3. N muss nicht ausgerechnet "berechnet" werden.

4. "Große ε" spielen keine Rolle.

5. Auf die ersten Folgeglieder $a_1, a_2, \ldots, a_N$ kommt es nicht an.

Bsp 1: $a_n = a$ für alle $n \geq 1$:

$(a)_{n \geq 1}$:

$$\lim_{n \to \infty} a = a$$

Bsp 2: $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1}$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad :$$

ε-N-Test: Sei $\varepsilon > 0$. Brauche:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$a_n - a$

$$\iff \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Wähle $N = \frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon).$$

Beweis: Angenommen, (a_n) hat Grenzwerte $\tilde{a} \neq \hat{a}$.

Also:

$$|\tilde{a} - \hat{a}| =: \varepsilon > 0.$$

Zu diesem ε, genauer $\frac{\varepsilon}{2}$, existieren dann $\tilde{N}$ und $\hat{N}$:

$$\begin{cases} |a_n - \tilde{a}| < \frac{\varepsilon}{2}, & n > \tilde{N} \\ |a_n - \hat{a}| < \frac{\varepsilon}{2}, & n > \hat{N} \end{cases}$$

Nun wähle $m > \max(\tilde{N}, \hat{N})$: Dann

$$\begin{aligned} |\tilde{a} - \hat{a}| &= |\tilde{a} - a_m - \hat{a} + a_m| \\ &= |(\tilde{a} - a_m) - (\hat{a} - a_m)| \\ &\leq |\tilde{a} - a_m| + |\hat{a} - a_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon = |\tilde{a} - \hat{a}| \end{aligned}$$

↯.

Beweis: Sei (a_n) konv. mit Limes a:

$$\lim a_n = a.$$

Wähle $\varepsilon = 1$. Dann $\exists N$:

$$|a_n - a| < 1, \quad \text{für } n \geq N.$$

Δ-Ungleichung:

$$|a_n| = |a_n - a + a|$$
$$\leq |a_n - a| + |a|$$
$$< 1 + |a|, \quad \text{für } n \geq N.$$

Wähle jetzt

$$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a|+1\}.$$

Dann gilt $\quad |a_n| \leq M, \quad n \geq 1.$ $\square$

Bsp.: 1. $(-1)^n = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ ist divergent.

2. Jede unbeschränkte Folge ist div.

$(a_n)_{n \ge 1}$:

$A = \{a_n : n \ge 1\}$ ist in $\mathbb{R}$ unbeschränkt

$\sup A = \infty$

oder $\inf A = -\infty$.

3. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ Jede Abzählung dieser ist eine divergente Folge.

$a_n \longrightarrow a$ genau $(a_n - a)$ Nullfolge

Beweis: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei N:

$$|b_n| < \varepsilon, \qquad n \geq N$$

Nach Vor.: $|a_n - a| \leq |b_n|$. Also:

$$|a_n - a| \leq |b_n| < \varepsilon, \qquad n \geq N. \quad \square$$

Beweis: Nach Vor. ex. $M > 0$:

$$|b_n| \leq M, \qquad n \geq 1.$$

$\varepsilon > 0$ beliebig

Da (a_n) Nullfolge, ex. zu $\frac{\varepsilon}{M}$ ein N:

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \qquad n \geq N.$$

Dann gilt:

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

für $n \geq N$.

Also: $a_n b_n \longrightarrow 0$.

Beispiele:

1. (x_n) beliebige beschr. Folge.

Dann
$$\frac{x_n}{n} \to 0 \,, \quad n \to \infty$$
$$= \frac{1}{n} \cdot x_n$$
Nullfolge.

2. Bsp $(x_n) = \frac{1}{n}$, $(y_n) = (n^2)$

$$(x_n y_n) = \left(\frac{1}{n} \cdot n^2\right) = (n) \text{ unbeschränkt,}$$
also <u>divergent</u>.

__Beweis__: Beh.:

$$\underbrace{\big|\,|a_n| - |a|\,\big|}_{\text{NF mit Major.}} \le \underbrace{|a_n - a|}_{\text{NF}}$$

Also: $|a_n| \longrightarrow |a|$.

Summe: Sei $\varepsilon > 0$, $a_n \to a$, $b_n \to b$: Es ex. N_a und N_b:

$$\begin{cases} |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, & n \ge N_a \\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, & n \ge N_b \end{cases}$$

Für $\underline{n \ge N} = \max(N_a, N_b)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \big|(a_n + b_n) - (a+b)\big| &= \big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \\ &\le |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\underline{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also: $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

Proof: Estimate $(a_n b_n)$

$$a_n b_n - ab = \underbrace{a_n b_n - a b_n} + \underbrace{a b_n - ab}$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a_n - a)}_{NF} \underbrace{b_n}_{\text{bounded.}}}_{NF} + \underbrace{\underbrace{a}_{\text{bounded.}} \underbrace{(b_n - b)}_{NF}}_{NF}$$

$$\underbrace{NF + NF}_{NF.}$$

Also: $a_n b_n \longrightarrow ab$, $n \to \infty$.

<u>Quotient</u>:

$$\boxed{\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b}},$$

dann auch $a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b}$.

Also sei $b_n \longrightarrow b \neq 0$

Dann ist

$$\frac{|b|}{2} = \varepsilon > 0$$

Dann ex. $N \geq 1$:

$$|b_n - b| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Dann gilt:

$$|b_n| \geq \underset{2\varepsilon}{|b|} - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{1}{\varepsilon} = M, \quad n \geq N$$

Also $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq N}$ <u>beschränkt</u>.

Also:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \underbrace{(b - b_n)}_{NF} \underbrace{\frac{1}{b b_n}}_{\text{beschr.}}$$

Also:

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}, \quad n \to \infty. \quad \overbrace{\quad}^{}NF$$

$\square$

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt also:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = \left(\lim a_n\right) * \left(\lim b_n\right)}$$

$* \in \{+,-,\cdot,:\}$

wobei $\lim b_n \neq 0$ für $* = :$

Beispiele:

$$\frac{n^2+2n+3}{n^2} = \frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{3}{n^2}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{NF} + \underbrace{\frac{3}{n^2}}_{NF}$$

$$\longrightarrow 1.$$

2. $$\frac{n}{n^2+2n+3} = \frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{\underset{\to 1}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

3. $$\frac{\overset{n^2}{(n^2+1)}\overset{n}{(n-3)}}{\underset{n^3}{(2n+1)^3}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^3}$$

$$\longrightarrow \frac{1\cdot 1}{2^3} = \frac{1}{8}. \quad \square$$

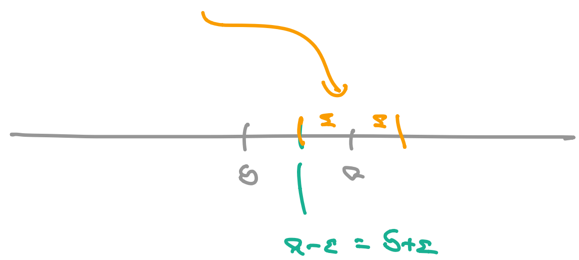
Beweis: Sei $a = \lim a_n$.

Angenommen: $a > b$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$a - \varepsilon \geq b + \varepsilon.$$

Dann ex. N:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{für } n \geq N$$



Dann gilt insbesondere

$$a_n > a - \varepsilon \geq b + \varepsilon, \quad n \geq N$$

für alle $n \geq N$

Also muss gelten: $a \leq b$.

$\lim a_n$.

$$a_n \le b_n \quad \text{für fast alle } n$$

$$\Longrightarrow \quad \lim a_n \le \lim b_n .$$

Beweis: Sei $b = \lim b_n$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \ge 1$:

$$|b_n - b| < \varepsilon, \quad n \ge N.$$

Dann:

$$b_n < b + \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N$$

Also auch

$$a_n \le b_n < b + \varepsilon \quad \text{für fast alle } n.$$

Daraus folgt:

$$\lim a_n \le b = \lim b_n \quad \blacksquare$$

Beispiel: Für $a_n = \left(-\frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ gilt

$$a_n < b_n, \quad n \ge 1$$

Aber:

$$\lim a_n = 0 = \lim b_n$$