Vorlesung 6 20.11.20

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x,y) : x,y \in \mathbb{R} \}$$

Definition:

$$(x,y) \oplus (u,v) := (x+u, y+v)$$

$$(x,y) \odot (u,v) := (xu - yv, xv + yu).$$

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (n,m) : n,m \in \mathbb{N} \}$$

$n - m$

$$(n,m) \sim (k,l) \iff n + l = m + k.$$

Äquivalenzrelation.

$$(n,m) \oplus (k,l) := (n+k, m+l).$$

$$(n,n) =: 0_{\mathbb{Z}} \quad , \dots$$

$\mathbb{K}$ Erweiterung von $\mathbb{R}$:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto \varphi(x) = (x,0)$$

injektiv, (natürlich nicht surjektiv)

Es gilt:

$$\varphi(x \underset{\cdot}{+} y) = \varphi(x) \underset{\odot}{\oplus} \varphi(y)$$

Daher $\mathbb{R} \cong \underbrace{\mathbb{R} \times \{0\}}_{\text{Unterkörper von } \mathbb{K}.} \subset \mathbb{K}$

Notation:

$\mathbb{1}$ für $(1,0)$

i für $(0,1)$

$+$ für $\oplus$

$\cdot$ für $\odot$

Dann:

$$(x,y) = (x,0) \oplus (0,y) = x(1,0) + y\cdot(0,1) = x\cdot\mathbb{1} + y\cdot i$$

Für unsere Zwecke:

$\mathbb{1}$, i sind Basisvektoren des 2-dim Vektorraums $\mathbb{C}$

bzgl. $\mathbb{R}$

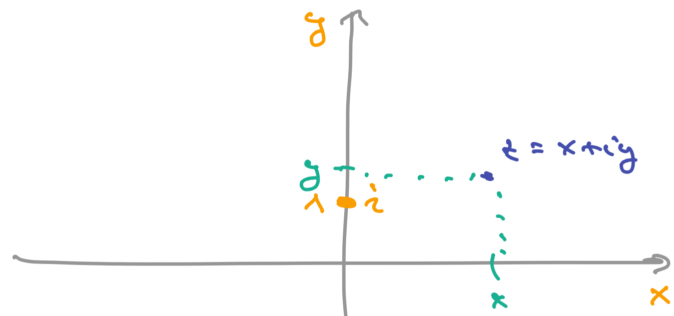
und

$z = x + yi$ ist komplexe Schreibweise für $x\cdot\mathbb{1} + y\cdot i$.

Es gilt dann:

$$i^2 = (0,1) \odot (0,1) = (-1,0) = -\mathbb{1}.$$

$$\mathbb{C} = \{ x+iy \, : \, x,y \in \mathbb{R} \} \qquad z = \underline{x}+\underline{y}i$$



Eine komplexe Zahl $z = x+iy$ heißt <u>reell</u>, falls $y = \operatorname{Im} z = 0$:

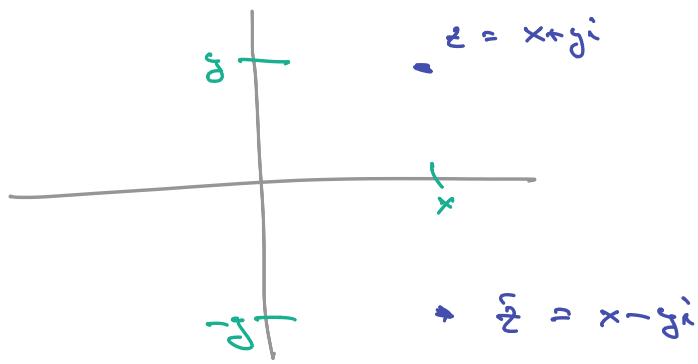
$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0 .$$

Komplexe Konjugation:

$$\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma(x+yi) = x-yi$$

übliche Bez.:

$$\overline{z} = \sigma(z) = \overline{x+yi} = x-yi$$



$z = x + yi, \quad w = u + vi$

[illegible]:

(i) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Dem.:

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(x+yi) - (x-yi)}{2i} = \frac{2yi}{2i} = y = \operatorname{Im} z.$$

(ii) $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$

Dem.:

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0 \iff z - \bar{z} = 0 \iff z = \bar{z}.$$

(iii) $\sigma(\sigma(z)) = \sigma^2(z) = z$

$$\sigma^2 = i_{\mathbb{C}}$$

[illegible]:

$$\sigma^{-1} = \sigma.$$

(v) $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ $\qquad z = x + yi$

$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$

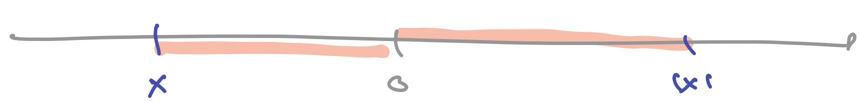
Denn:

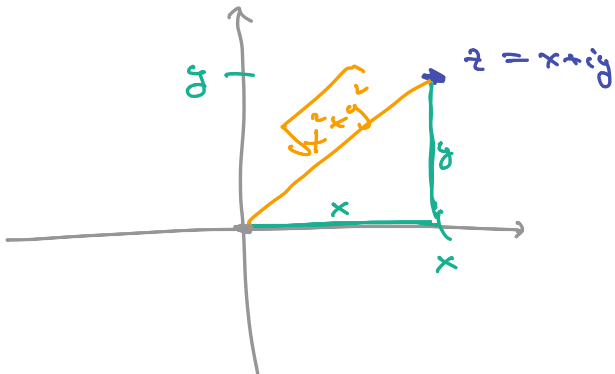
$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+yi)(x-yi) \\ &= x^2 - \cancel{xyi} + \cancel{xyi} - y^2 \underbrace{i^2}_{=-1} \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Die komplexen Zahlen können nicht angeordnet werden: $\quad i > 0, \quad i < 0 \quad \lightning.$





Fie $z \in \mathbb{C}$ definim: $z = x+yi$

$$|z|_{\mathbb{C}} := \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$|x|_{\mathbb{R}} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Fie $z \in \mathbb{C}$ real, a.î. $\operatorname{Im} z = 0$,

atunci

$$|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2} = |x|_{\mathbb{R}}$$

Rechenregeln:

(i) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$

$|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

Bew.: $z = x + yi$:

$|\mathrm{Re}\, z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|.$

(ii) $|zw| = |z| \cdot |w|$

Zeige: $|zw|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$

$|zw|^2 = zw\,\overline{(zw)} = zw\,\bar{z}\bar{w}$

$= z\bar{z}\,w\bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2.$ ✓

(iii) $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}$

$= (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})} + |w|^2$

$= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2$

Es gilt:

$|\mathrm{Re}\, z\bar{w}| \leq |z\bar{w}| = |z||\bar{w}| = |z||w|$

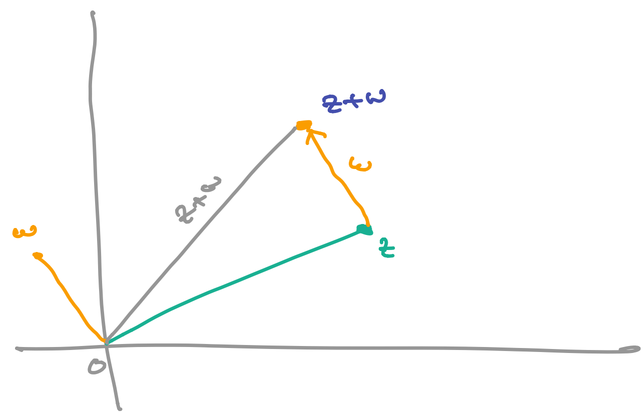
Also gilt:

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2$$

$$= \left(|z| + |w|\right)^2$$

Also:

$$|z+w| \le |z| + |w| . \qquad \blacksquare$$



$x^2 + 1 = 0$

Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$

reell: falls $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

normiert: falls $a_n = 1$.

Beispiele:

1. $a_0 \neq 0$ ist Polynom vom Grad 0.

   Bem.: $a_0 = 0$ kein Polynom abgegeben,

   Nullpolynom, Grad $= -\infty$.

2. $mx + b$ Polynome vom Grad 1, falls $m \neq 0$.

3. $x^2 + px + q$ normierte quadratische Polynom.

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

definiert eine Funktion

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} .$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k \quad : \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$p = f$ als Funktion gleich $\iff$

$a_k = b_k$ für alle k.

Nullstelle: $a \in \mathbb{C}$ heißt Nullstelle des Polynoms p, wenn

$$p(a) = 0.$$

Beispiele: 1. Lineare Gleichung:

$$mx + b = 0, \quad m \neq 0$$

hat die Nullstelle $x = -\frac{b}{m}$.

2. Quadratische Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

Lösungsformel:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

$$\begin{cases} \text{reelle verschiedene}, & \text{für } p^2 - 4q > 0 \\ \text{zweifache reelle}, & \text{für } p^2 - 4q = 0 \\ \text{komplexe konjugierte}, & \text{für } p^2 - 4q < 0 \end{cases}$$

Bizonyítás: Ismert hogy $z_0 \in \mathbb{C}$ esetén:

$$\boxed{p(z) = (z - z_0) f(z) + c}$$

Dem:

$$p(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k \quad , \qquad a_n = 1$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$$

Dem:

$$p(z) + z_0 f(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k z_0) z^k = \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} z^k + c$$

$$(b_n = 0)$$

Koefficiens összehasonlítás:

$$a_k + b_k z_0 = b_{k-1} \quad , \qquad k = n, n-1, \dots, 1$$

$$a_0 + b_0 z_0 = c \, .$$

Ha igaz z_0 zérushely, akkor $p(z_0) = 0$,

ezért

$$c = 0,$$

így

$$p(z) = (z - z_0) f(z) \, .$$

[illegible] z_0 $p(z_0) = 0$, [illegible] [illegible]

$$\frac{p(z)}{z - z_0} = q(z)$$

Exemplu: $p(z) = z^3 + 2z^2 - 11z + 6$

$p(2) = 0$

$$(z^3 + 2z^2 - 11z + 6) : (z - 2) = z^2 + 4z - 3$$

$$
\begin{array}{l}
-(z^3 - 2z^2) \\
\quad 4z^2 - 11z + 6 \\
\quad -(4z^2 - 8z) \\
\qquad -3z + 6 \\
\qquad -(-3z + 6) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$p(z) = (z-z_0)\, f(z)$$

$$= (z-z_0)(z-z_1)\cdot r(z)$$

$$\vdots$$

Grad 0

$$= (z-z_0)(z-z_1)\cdot \ldots \cdot (z-z_{n-1})\cdot p_0(z)$$

$= 1$

$$p(z) = (z-z_1)\ldots(z-z_n) = \prod_{k=1}^{n} (z-z_k) .$$

Bsp: 1. $p(z) = (z-1)^n$

$z=1$ n-fache Nullstelle

2. $p(z) = \prod_{k=1}^{n} (z-k)$

Nullstellen $1, 2, \ldots, n$, einfach.

Presup:

$$p(z) = a_n (z-z_1) \cdots (z-z_n)$$

Cât $p(z_0) = 0$ fie și $z_0 \neq z_1, \dots, z_n$

Dem

$$0 = p(z_0) = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n} (z_0 - z_k) \neq 0$$

Dar nu poate: $a_n = 0$.

Beweis: Gegeben $a_0, \dots, a_n$ verschieden.

Definiere Lagrangepolynome:

$$\ell_k(x) = \prod_{l \neq k} \underbrace{\frac{x - a_l}{a_k - a_l}}_{\neq 0}, \quad k = 0, \dots, n$$

wohldefiniert, Polynom vom Grad $= n$ genau.

$$\boxed{\ell_k(a_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.}$$

Dann ist

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k \ell_k$$

das gesuchte Polynom:

$$\boxed{p(a_j) = c_j, \quad j = 0, \dots, n.}$$

∎