3.4 Abzählbarkeit und Mächtigkeit

Gibt es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen? Gibt es mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen? Und gibt es Mengen, die ›noch größer‹ sind als die Menge der reellen Zahlen? Um diese Fragen zu beantworten, definieren wir zuerst, wann wir zwei Mengen als ›gleich groß‹ ansehen wollen.

Definition *Zwei nichtleere Mengen A und B heißen gleichmächtig, geschrieben $A \sim B$, wenn sie bijektiv aufeinander abgebildet werden können.* ⋊

Diese Definition entspricht der intuitiven Vorstellung. Können wir die Elemente zweier Mengen paarweise zuordnen, ohne dass am Ende ein Element übrig bleibt, so betrachten wir diese Mengen als gleich groß. Dazu müssen wir die Mengen nicht einmal abzählen oder auf andere Weise ihre Größe quantifizieren.

Offensichtlich definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation, deren Klassen aus gleichmächtigen Mengen bestehen.

▷ A. Die Mengen $\{\mathrm{H}, \mathrm{i}, \mathrm{l}, \mathrm{f}, \mathrm{e}\}$ und $\{\ominus, \oplus, \oslash, \odot, \otimes\}$ sind gleichmächtig.

B. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ sind gleichmächtig, eine Bijektion ist zum Beispiel $n \mapsto 2n$.

C. Ebenso sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig, eine Bijektion ist beispielsweise

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \begin{cases} n/2, & n \text{ gerade,} \\ (1-n)/2, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese nummeriert $\mathbb{Z}$ als Folge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ..$ durch. ◁

Als *Standardmengen* für endliche Mengen definieren wir

$$\mathbb{A}_0 := \varnothing,$$
$$\mathbb{A}_n := \mathbb{A}_{n-1} \cup \{n\} = \{1, .., n\}, \qquad n \geqslant 1.$$

Die Mengen $\mathbb{A}_n$ sind tatsächlich nicht gleichmächtig und von $\mathbb{N}$ verschieden, wie die beiden folgenden Sätze zeigen.

21 **Satz** *Es gilt $\mathbb{A}_m \sim \mathbb{A}_n$ genau dann, wenn $m = n$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ $\Leftarrow$ Ist $m = n$, so sind die beiden Mengen gleich, also erst recht gleichmächtig.

$\Rightarrow$ Sei umgekehrt $\mathbb{A}_m \sim \mathbb{A}_n$, wobei wir $1 \leqslant m \leqslant n$ annehmen dürfen. Wir argumentieren induktiv bezüglich n. Für $n = 1$ ist $m = n$, und die Behauptung ist wahr. Ist $n > 1$, so existiert nach Annahme zwischen beiden Mengen eine Bijektion. Dann gibt es aber auch eine Bijektion mit $m \mapsto n$. Die Einschränkung dieser Bijektion auf $\mathbb{A}_{m-1}$ ist dann auch eine Bijektion zwischen $\mathbb{A}_{m-1}$ und $\mathbb{A}_{n-1}$, es ist also $\mathbb{A}_{m-1} \sim \mathbb{A}_{n-1}$. Nach Induktionsannahme folgt hieraus $m-1 = n-1$. Also ist $m = n$, und wir sind fertig. ⟫⟫

22 **Satz** *Es ist $\mathbb{A}_n \nsim \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.* ⋊

⟪⟪ Der Beweis ist als Übungsaufgabe überlassen $_{\text{A-15}}$. ⟫⟫

Definition *Eine nichtleere Menge M heißt*

(i) *endlich, falls $M \sim \mathbb{A}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$,*
(ii) *abzählbar unendlich, falls $M \sim \mathbb{N}$,*
(iii) *abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist,*
(iv) *überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.* ⋊

Wegen des vorangehenden Satzes ist eine Menge nicht gleichzeitig endlich und abzählbar unendlich. Die Definition ist also sinnvoll.

Definition *Die Kardinalität einer Menge ist* [2]

$$|M| := \begin{cases} n & \text{falls } M \sim \mathbb{A}_n, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$ ⋊

Andere gebräuchliche Bezeichnungen sind $\operatorname{card} M$, $\operatorname{Anz}(M)$ oder $\# M$. Die so definierte Anzahlfunktion macht keinen Unterschied zwischen ›abzählbar unendlich‹ und ›überabzählbar‹.

▪ Abzählbare Mengen

Zunächst einige Beobachtungen zu abzählbaren Mengen. Es überrascht nicht, dass Teilmengen abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind. Zuerst betrachten wir die Menge $\mathbb{N}$ selbst.

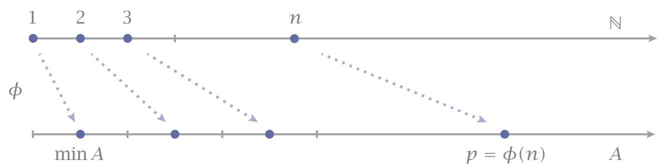
23 **Satz** *Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.* ⋊

⟪⟪ Man zeigt durch Induktion über das Maximum, dass jede beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{N}$ endlich ist $_{\text{A-13}}$. Ist also A *nicht* endlich, so ist A jedenfalls unbeschränkt. Wir können dann eine Abbildung

$$\phi : \mathbb{N} \to A$$

[2] Die Striche $|\cdot|$ werden in der Mathematik vielfach verwendet – für den Betrag einer reellen Zahl, die Länge eines Intervalls, die Kardinalität einer Menge, und manches andere. Es sollte jeweils aus dem Kontext erkennbar sein, was gemeint ist.

Abb 2 Zum Beweis von Satz 23



induktiv definieren durch

$$\begin{aligned} \phi(1) &\coloneqq \min A, \\ \phi(n+1) &\coloneqq \min\{q \in A : q > \phi(n)\}, \qquad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Aus dieser Definition folgt $\phi(1) < \phi(2) < ..$ und allgemein

$$\phi(n) < \phi(m), \qquad n < m.$$

Die Funktion ϕ ist, wie man sagt ??, *streng monoton steigend*. Hieraus folgt, dass sie auch *injektiv* ist.

Bleibt zu zeigen, dass ϕ *surjektiv* auf A ist. Zu beliebigen $p \in A$ sollte

$$n \coloneqq \min\{m \in \mathbb{N} : \phi(m) \geqslant p\}$$

der richtige Kandidat sein. In der Tat folgt unmittelbar aus dieser Definition

$$\phi(n) \geqslant p.$$

Für $n > 1$ gilt außerdem $\phi(n-1) < p$, denn $\phi(n-1) \geqslant p$ widerspräche der Definition von n. Mit der Definition von ϕ erhalten wir

$$\phi(n) = \min\{q \in A : q > \phi(n-1)\} \leqslant p,$$

denn p ist ja Element der Menge in der Mitte. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt $\phi(n) = p$. ⟫⟫⟫

Bemerkung Eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \to M$ kann man als ›Durchnummerierung‹ aller Elemente von M auffassen. Sie erlaubt es, alle Elemente in Form einer Folge $m_1, m_2, m_3, ..$ mit $m_n = \phi(n)$ hinzuschreiben, so dass

$$M = \phi(\mathbb{N}) = \{m_n : n \geqslant 1\}.$$

Obendrein tritt jedes Folgenglied *genau einmal* auf. ⊸

Da jede abzählbare Menge bijektiv auf $\mathbb{N}$ oder eine der Mengen $\mathbb{A}_n$ abgebildet werden kann, folgt aus diesem Satz das entsprechende Result für beliebige abzählbare Mengen.

3.18

24 **Korollar** *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.* $\rtimes$

Abzählbarkeit ›vererbt‹ sich also auf Teilmengen – was nicht weiter überrascht. Interessanter ist da schon die Frage, ob zum Beispiel ›abzählbar $\times$ abzählbar = abzählbar‹ gilt. Das ist in der Tat richtig.

25 **Satz** *Die Menge* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir ordnen die Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in folgendem Matrixschema an:

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Dieses zählen wir mit dem *Cantorschen Diagonalverfahren* ab, indem wir sukzessive die *Diagonalen* durchnummerieren, deren Elemente (n, m) dieselbe Summe $n + m$ haben. Die ersten Glieder dieser Diagonalnummerierung sind

$$\begin{aligned} &(1,1), \\ &(2,1), (1,2), \\ &(3,1), (2,2), (1,3), \\ &(4,1), (3,2), (2,3), (1,4), \quad \ldots\ . \end{aligned}$$

Dies ist möglich, da jede dieser Diagonalen nur *endlich* viele Elemente besitzt, und liefert eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

26 **Korollar** *Das kartesische Produkt zweier und allgemeiner endlich vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten nur den Fall zweier abzählbar *unendlicher* Mengen. Es sei also $A \sim \mathbb{N}$ und $B \sim \mathbb{N}$. Dann aber ist $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und die Behauptung folgt mit $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ aus dem vorangehenden Satz.

Das kartesische Produkt von mehr als zwei, aber endlich vielen abzählbaren Mengen behandelt man mit Induktion über die Anzahl der Faktoren. ⟩⟩⟩⟩⟩

27 **Satz** *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen ist abzählbar.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wählen wir für jede rationale Zahl auf irgendeine Weise eine eindeutige Darstellung $r = n/m$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, so erhalten wir eine Bijektion zwischen $\mathbb{Q}$ und einer Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Da diese Teilmenge abzählbar ist, ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Überabzählbare Mengen

Wir klären zunächst die Frage, ob es überhaupt überabzählbare Mengen gibt. Der nächste Satz führt zu einer positiven Antwort.

28 **Satz** *Es gibt keine Surjektion einer beliebigen Menge X auf $\mathcal{P}(X)$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Für $X = \varnothing$ ist $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing\}$. Da die Bildmenge einer auf der leeren Menge definierten Abbildung ebenfalls leer ist und somit $\varnothing$ nicht zu deren Bild gehören kann, ist die Behauptung in diesem Fall richtig.

Sei jetzt $X \neq \varnothing$ und $\Phi : X \to \mathcal{P}(X)$ eine *beliebige* Abbildung. Betrachte

$$A := \{x \in X : x \notin \Phi(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Angenommen, es gibt ein $\alpha \in X$ mit

$$\Phi(\alpha) = A.$$

Wäre $\alpha \in A$, so folgt $\alpha \notin \Phi(\alpha) = A$ aufgrund der Definition von A. Wäre aber $\alpha \notin A$, so bedeutet dies $\alpha \notin \Phi(\alpha)$, und es folgt $\alpha = A$. Das klappt also hinten und vorne nicht, und so kann es kein $\alpha \in X$ mit $\Phi(\alpha) = A$ geben. Also ist Φ *nicht* surjektiv. ⟩⟩⟩⟩

Da man die Menge X durch

$$X \to \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto \{x\}$$

bijektiv auf eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ abbilden kann, ist $\mathcal{P}(X)$ *immer mächtiger* als X. Somit ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mächtiger als $\mathbb{N}$ und damit *überabzählbar*. Es ist sogar jede der Mengen

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \ldots$$

mächtiger als die vorangehende, *ad infinitum*. Es gibt somit mindestens unendlich viele verschiedene Unendlichkeiten … . — Aber was gilt für die reellen Zahlen?

29 **Satz** *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Angenommen, $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann gibt es eine Nummerierung [3]

$$x_0, x_1, x_2, x_3, ..$$

aller reellen Zahlen. Wir konstruieren dann eine weitere reelle Zahl ξ, die *nicht* in dieser Nummerierung vorkommt.

[3] Wir fangen zur Abwechslung bei 0 an.

Wir konstruieren ξ mithilfe einer fallenden Folge von Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n], \qquad n \geqslant 0,$$

die wir induktiv definieren. Als I_0 wählen wir ein beliebiges abgeschlossenes Intervall, das *nicht* den Punkt x_0 enthält:

$$I_0 := [a_0, b_0] \not\ni x_0.$$

Ist nun I_{n-1} für $n > 0$ bereits konstruiert, so wählen wir I_n als linkes oder rechtes abgeschlossenes Drittel von I_{n-1} so, dass

$$I_n := [a_n, b_n] \not\ni x_n.$$

Das ist immer möglich, da x_n nicht in beiden Dritteln gleichzeitig enthalten sein kein. Offensichtlich ist $I_n \subset I_{n-1}$.

Für die Randpunkte der so definierten Intervalle gilt

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant .. \leqslant a_n < b_n \leqslant .. \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b_0, \qquad n \geqslant 0.$$

Also gilt auch

$$A := \{a_n : n \geqslant 0\} < B := \{b_n : n \geqslant 0\}.$$

Insbesondere ist A nach oben beschränkt, und es existiert $\xi = \sup A$ wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Es gilt dann

$$A \leqslant \xi \leqslant B,$$

denn alle Elemente von B sind obere Schranken von A, und ξ ist die kleinste obere Schranke. Somit gilt

$$\xi \in I_n, \qquad n \geqslant 0.$$

Aufgrund der Konstruktion der Intervalle I_n bedeutet dies aber, dass $\xi \neq x_n$ für alle $n \geqslant 0$. Wir haben also eine reelle Zahl ξ gefunden, die nicht in der Aufzählung $x_0, x_1, x_2, ..$ enthalten ist – ein Widerspruch.)))))

Bemerkungen *a.* Die Intervalle I_n bilden eine sogenannte *Intervallschachtelung* A-2.39.

b. Aus der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen ergibt sich, dass auch das kartesische Produkt abzählbar unendlich vieler endlicher Mengen mit mindestens zwei Elementen überabzählbar ist. ⊸

4

Komplexe Zahlen

Wir haben bisher das Zahlengebäude

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

beschrieben. Von ›unten‹ betrachtet, werden die *ganzen Zahlen* als Erweiterung der natürlichen Zahlen eingeführt, um uneingeschränkt die Gleichung

$$m + x = n$$

innerhalb dieses Zahlensystems lösen zu können. Die *rationalen Zahlen* werden eingeführt, um uneingeschränkt die Gleichung

$$mx = n$$

für $m \neq 0$ lösen zu können. Die rationalen Zahlen werden zu dem angeordneten Körper der *reellen Zahlen* vervollständigt, um unter anderem die quadratische Gleichung

$$x^2 = a$$

für alle $a \geqslant 0$ lösen zu können.

Mehr ist allerdings auch nicht möglich! Denn in jedem angeordneten Körper gilt ja $x^2 \geqslant 0$. Eine Gleichung wie

$$x^2 = -1$$

ist dort *unerfüllbar*. Trotzdem bleibt das Bedürfnis, auch diese Gleichung ›irgendwie zu lösen‹. Dies führt zur Erweiterung der reellen Zahlen zu den *komplexen Zahlen*, und damit zu einer weiteren Stufe des Zahlengebäudes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Dieser *Erweiterungskörper* $\mathbb{C}$ kann allerdings nicht mehr angeordnet sein.

4.1

4.1 Vorüberlegungen

Angenommen, es gibt einen Erweiterungskörper $\mathbb{K} \supset \mathbb{R}$ mit einem gewissen Element, nennen wir es einmal i, so dass

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Dann ist jedenfalls $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$. Ferner gehören zu $\mathbb{K}$ auch alle Ausdrücke der Form

$$z \coloneqq x + y\mathrm{i}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind der *Realteil* $\Re z \coloneqq x$ und der *Imaginärteil* $\Im z \coloneqq y$ eindeutig durch z bestimmt. Denn ist $x + y\mathrm{i} = u + v\mathrm{i}$, so ist

$$x - u = (v - y)\mathrm{i}.$$

Wäre $v \neq y$, so könnten wir diese Gleichung umformen zu

$$\mathrm{i} = \frac{x - u}{v - y}.$$

Dann aber wäre i eine reelle Zahl – ein Widerspruch. Also ist $v = y$ und damit auch $x = u$.

Setze jetzt

$$\mathbb{C} \coloneqq \{z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{K} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Für Summe und Produkt zweier Elemente $z = x + y\mathrm{i}$ und $w = u + v\mathrm{i}$ in $\mathbb{C}$ gilt dann notwendigerweise

$$\begin{aligned} z + w &= (x + y\mathrm{i}) + (u + v\mathrm{i}) \\ &= (x + u) + (y + v)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} zw &= (x + y\mathrm{i})(u + v\mathrm{i}) \\ &= xu + xv\mathrm{i} + yu\mathrm{i} + yv\mathrm{i}^2 \\ &= (xu - yv) + (xv + yu)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also wiederum Elemente von $\mathbb{C}$.

Behauptung *Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ ein Körper.* $\rtimes$

⟪⟪⟪ Zum Beispiel sind $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0\mathrm{i}$ und $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0\mathrm{i}$ die Null und Eins in $\mathbb{C}$. Für $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ ist ferner

$$z^{-1} = \frac{1}{x + y\mathrm{i}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{i}$$

wegen $x^2 + y^2 \neq 0$ ein wohldefiniertes Element in $\mathbb{C}$. Durch Multiplikation mit z verifiziert man, dass dies tatsächlich das multiplikativ Inverse zu z ist.

Sind also z und w in $\mathbb{C}$, so sind es auch $z+w$, zw, $-z$ und z^{-1} für $z \neq 0_{\mathbb{C}}$. Die Körperoperationen führen also nicht aus $\mathbb{C}$ heraus. Da die Körperaxiome nach Voraussetzung in $\mathbb{K}$ gelten, gelten sie damit auch in $\mathbb{C}$. ⟫⟫⟫

Gibt es also überhaupt einen Erweiterungskörper $\mathbb{K}$ von $\mathbb{R}$ mit der gewünschten Eigenschaft, so enthält dieser immer den Körper $\mathbb{C}$. Damit ist allerdings noch nichts über dessen *Existenz* gesagt. Wir kommen nicht umhin, einen solchen Körper explizit zu konstruieren – wobei wir uns natürlich von unseren Vorüberlegungen leiten lassen.

4.2 Konstruktion der komplexen Zahlen

Sei $\mathbb{K} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Wir *definieren*

$$(x, y) \oplus (u, v) := (x + u, y + v),$$
$$(x, y) \odot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Dann rechnet man unter anderem nach:
(i) $\oplus$ und $\odot$ sind assoziativ und kommutativ.
(ii) Es gilt das Distributivgesetz.
(iii) Es ist $0_{\mathbb{K}} = (0, 0)$ und $1_{\mathbb{K}} = (1, 0)$.
(iv) Die inversen Elemente sind $-(x, y) = (-x, -y)$ und

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right), \qquad (x, y) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Das Ergebnis lautet somit:

1 **Satz** $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ *ist ein Körper.* ⋊

Bemerkung Ganz ähnlich verfährt man übrigens bei der Konstruktion der ganzen aus den natürlichen Zahlen, und der rationalen aus den ganzen Zahlen. Statt ›Zahlen‹ betrachtet man Zahlenpaare und definiert für diese Operationen, die die vertraute Addition und Multiplikation nachbilden. ⊸