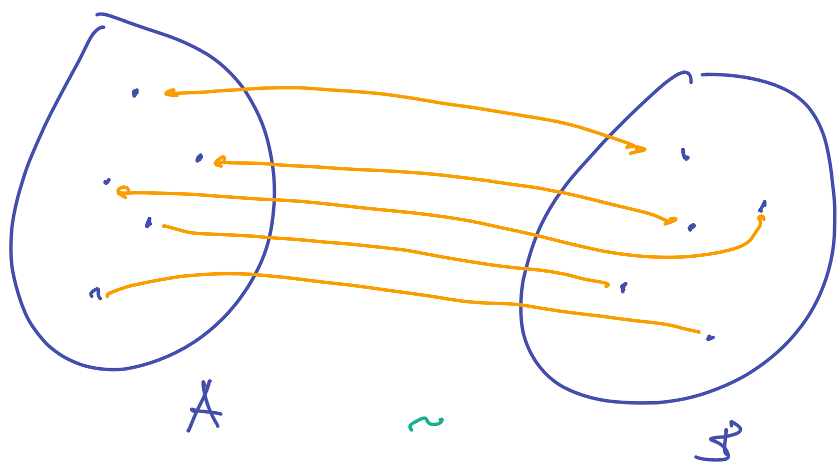
Vorlesung 5 18. 11. 2020



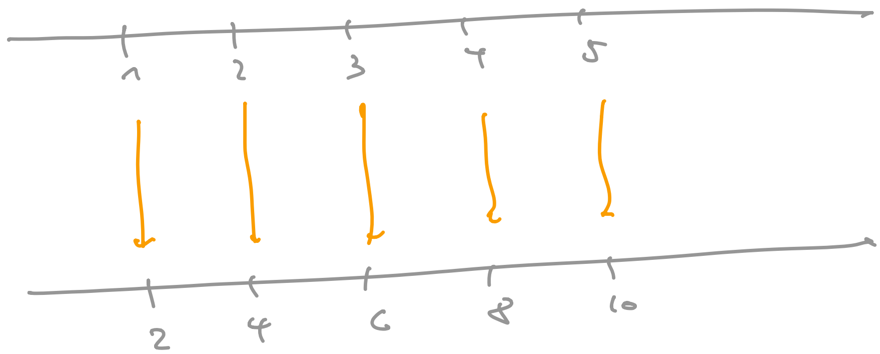

Äquivalenzrelation:

(i) $A \sim A$ ✓

(ii) $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ ✓

(iii) Transitivität:

$$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$



$\varphi: \quad n \mapsto 2n$

3. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ :

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 0 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & -1 \\ 4 & \mapsto & 2 \\ & \vdots & \end{array}\right\} \qquad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & n \text{ ung.} \end{cases}$$

bijektiv.

$A_0 = \emptyset$

$A_n := A_{n-1} \cup \{n\}$

$= \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad n \geq 1.$

**Satz:** $A_m \sim A_n$ genau dann, wenn $m = n$.

**Beweis:** $m = n \Rightarrow A_m = A_n \Rightarrow A_m \sim A_n$. ✓

Umgekehrt: Sei $A_m \sim A_n$.

Können annehmen

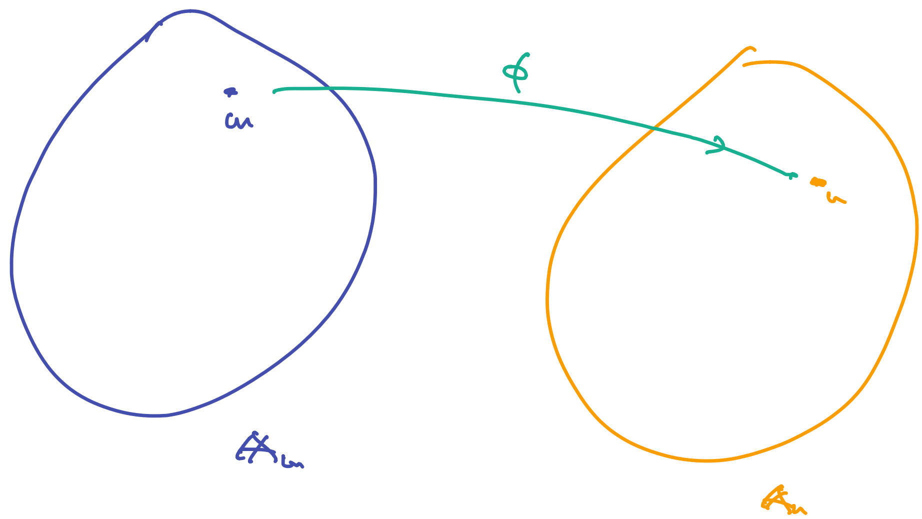
$1 \leq m \leq n$.

Induktion: $n = 1 \Rightarrow m = n$ ✓

Sei also $n > 1$: $A_m \sim A_n$

Dann gibt es auch eine Bijektion $\varphi: A_m \to A_n$

mit $\varphi(m) = n$




Betrachte:

$$\phi\big|_{A_m \setminus \{m\}} \longrightarrow \underbrace{A_n \setminus \{n\}}$$

$$\sim A_{m-1} \qquad\qquad \sim A_{n-1}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$m-1 = n-1$$

$$\Rightarrow \quad m = n. \qquad ✓$$

Satz: $A_n \not\sim \mathbb{N}, \quad n \geq 1.$

G

Kardinalität: $\underline{|M|} := \begin{cases} n, & M \sim A_n \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$

$$|M| = \text{card } M = \text{Anz}(M) = \# M.$$

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{N}$.

Ist $A$ beschränkt: Induktion über $\max A$: $A$ ist endlich

Sei also $A$ nicht endlich (und damit auch unbeschränkt).

Konstruiere eine Bijektion

$$\varphi : \mathbb{N} \to A$$

induktiv:

$$\varphi(1) := \min A$$

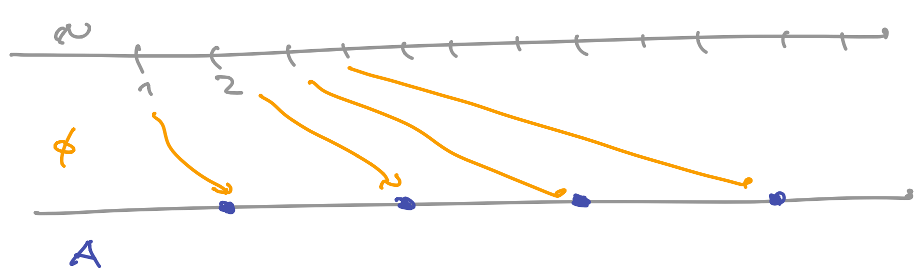
$$\varphi(n+1) := \min \{ \xi \in A : \xi > \varphi(n) \}, \quad n \geq 1.$$

Dann gilt:

$$\varphi(1) < \varphi(2) < \dots$$

und allgemein

$$\varphi(k) < \varphi(m)$$



Also ist $f$ <u>injektiv</u> :

$n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$ ✓

Bleibt zu zeigen : $f$ ist <u>surjektiv</u> :

Genauer zeige : Sei $p \in A$ beliebig

$n := \min \{ m \in \mathbb{N} : f(m) \geq p \} \neq \emptyset$

Behauptung : $\boxed{f(n) = p.}$

Nach Def. :

$f(n) \geq p > f(n-1) \quad (n > 1)$

Nach Def. von $f$ :

$f(n) := \min \{ q \in A : q > f(n-1) \}$

$p \qquad \leq p$

Also : $f(n) = p.$

Also : $\underline{\mathbb{N} \sim A}$ . ∎

<u>Bem.</u>: Durchnummerierung von $A$ :

$a_n := f(n)$

Dann

$A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots : n \in \mathbb{N} \}$

$A = f(\mathbb{N})$

**Satz:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (n,m) : n, m \in \mathbb{N} \}$$

Anordnung:

$$\begin{array}{llll}
\underset{1}{(1,1)}, & \underset{3}{(1,2)}, & \underset{6}{(1,3)}, & \underset{10}{\ldots} \\
\underset{2}{(2,1)}, & \underset{5}{(2,2)}, & \underset{9}{(2,3)}, & \ldots \\
\underset{4}{(3,1)}, & \underset{8}{(3,2)}, & \ldots & \\
\underset{7}{(4,1)}, & \ldots & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

usw.

Damit Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**Korollar:** $\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

**Potenzmenge:** Menge aller möglichen Teilmengen

$X = \{1\}$ $\quad \mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, \{1\} \}$

$X = \{1,2\}$ $\quad \mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$

$x \in X$, dann $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$

$X = \emptyset$ $\quad \mathcal{P}(\emptyset) = \{ \emptyset \}$.

Dann: $X \in \mathcal{P}(X)$.

**Beweis:** 1. Für $X = \emptyset$: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Dann gilt: $\varphi : \emptyset \longrightarrow \mathcal{P}(\emptyset)$ kann nicht surjektiv sein.

Sei also $X \neq \emptyset$. Sei

$\Phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ beliebige Abb.

z.z.: $\Phi$ kann nicht surjektiv sein.

Definiere

$$A = \{ x \in X : \underline{x \notin \Phi(x)} \} \in \mathcal{P}(X).$$

Frage: Gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\Phi(\alpha) = A$ ?

Wäre $\alpha \in A$, dann gilt nach $\alpha \notin \Phi(\alpha)$, also auch dann $\alpha \notin A$.

Wäre aber $\alpha \notin A$, dann ist erfüllt, also $\alpha \in A$. ↯

Also: es gibt kein $\alpha \in A$ mit $\Phi(\alpha) = A$.

Also: $\Phi$ ist nicht surjektiv.

Also ist $\mathcal{P}(X)$ echt mächtiger als $X$.

$\mathbb{N} < \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <$ usw.

Es gibt also unendlich viele Abstufungen von unendlich $\infty$.

$\mathbb{N} < \mathbb{R}$ ?

Beweis: Indirekt: Angenommen $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$.

Dann gibt es Abzählung der reellen Zahlen:

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

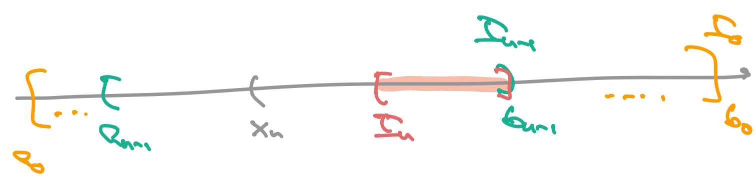
Konstruiere daraus ein $\xi \in \mathbb{R}$, das nicht zu der Aufzählung gehört.

Konstruiere Intervalle $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ wie folgt:

$$I_0 = [a_0, b_0] \not\ni x_0$$


Sei bereits $I_{n-1}$ für $n > 0$ definiert:

Betrachte $x_n$:




Dann wähle $I_n$ als rechtes oder linkes Drittel von $I_{n-1}$ so, dass

$$x_n \notin I_n.$$

Damit existiert Folge $I_0, I_1, I_2, \dots$

mit

$$\boxed{\begin{array}{l} I_n \subset I_{n-1} \\ x_n \notin I_n . \end{array}} \qquad (*)$$

$I_n = (a_n, b_n)$. Dann zeigt $(*)$

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots\dots \le b_2 \le b_1 \le b_0$$

Also gilt auch

$$A = \{a_n : n \ge 0\} \le B = \{b_n : n \ge 0\}$$

Also ex.

$$\xi = \sup A$$

Dann gilt: $\boxed{A \le \xi \le B}$

Also gilt auch

$$\xi \in I_n \quad \text{für alle } n \ge 0$$

Aber $x_n \notin I_n$ für alle $n$.

Also folgt: $x_n \ne \xi$ für alle $n$.

$\blacksquare$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\cap$

$\mathbb{Z}$ $\qquad m + x = n$ lösbar

$\cap$

$\mathbb{Q}$ $\qquad mx = n, \quad m \neq 0$ lösbar

$\cap$

$\mathbb{R}$ $\qquad x^2 = a$ für $a \geq 0$

$x^2 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$

$x^2 = -1$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$.

$\cap$

$\mathbb{C}$ $\qquad x^2 + 1 = 0$ lösbar ?

Angenommen, es gibt $\mathbb{K} \supset \mathbb{R}$ mit einem gewissen Element $i \in \mathbb{K}$, mit

$$i^2 = -1.$$

Dann sind

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$\in \mathbb{K}$ $\quad$ $x$ Realteil, $y$ Imaginärteil

Eindeutige Darstellung:

$$x + yi = u + vi$$

$$\iff \quad x - u = (v - y)\, i$$

Falls $v \neq y$: $\quad i = \dfrac{x-u}{v-y} \in \mathbb{R}$ ↯

Also: $\quad v = y, \quad x = u.$

Setze jetzt

$$\mathbb{C} := \{ z = x + yi : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$\subset \mathbb{K}$

Rechnungen in $\mathbb{C}$:

$$z = x + yi, \quad w = u + vi$$

$$\begin{aligned} z + w &= (x + yi) + (u + vi) \\ &= (x+u) + (y+v)i \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} zw &= (x+yi)(u+vi) \\ &= xu + xvi + yui + yv\overbrace{i^2}^{=-1} \\ &= (xu - yv) + (xv + yu)i \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ wird damit ein Körper:

$$0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$$

$$1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$$

Für $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ ist

$$z^{-1} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i$$

nachrechnen.