Rekursion

Auf dem Prinzip der vollständigen Induktion beruht auch das Prinzip der *rekursiven Definition*. Zunächst einige Beispiele.

Die *Fakultät* $n!$ einer natürlichen Zahl n ist rekursiv definiert durch

$$1! \coloneqq 1, \qquad n! \coloneqq n \cdot (n-1)!, \qquad n \geqslant 2.$$

Der Wert von $n!$ wird also für $n > 1$ durch den Wert von $(n-1)!$ erklärt. Nach endlich vielen Schritte ist $n!$ auf $1!$ zurückgeführt:

$$\begin{aligned} 2! &= 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1, \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1, \\ &\;\vdots \\ n! &= n \cdot (n-1) \cdot .. \cdot 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Außerdem definiert man $0! \coloneqq 1$. Die Rekursionsformel gilt damit ab $n = 0$:

$$0! \coloneqq 1, \qquad n! \coloneqq n \cdot (n-1)!, \qquad n \geqslant 1.$$

Die *Potenzen* a^n eines Elementes a eines beliebigen Körpers $\mathbb{K}$ sind rekursiv definiert durch

$$a^0 \coloneqq 1, \qquad a^n \coloneqq a\, a^{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Mit Induktion beweist man die üblichen *Potenzgesetze* $_{\text{A-11}}$

$$a^n a^m = a^{n+m}, \qquad (a^n)^m = a^{nm}, \qquad n, m \geqslant 0.$$

Die *allgemeine Summe* von n Elementen $a_1, .., a_n$ schreibt man als

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + .. + a_n.$$

Deren rekursive Definition ist

$$\sum_{k=1}^{0} a_k \coloneqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Entsprechend erklärt man das *allgemeine Produkt*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdot\cdot a_n.$$

Da in einem Körper Addition und Multiplikation assoziativ und kommutativ sind, sind Klammern entbehrlich und die Reihenfolge unerheblich. Dies spielt erst eine Rolle bei *Reihen*, also unendlichen Summen.

▹ *Beispiele* Es gilt

$$na = \sum_{k=1}^{n} a, \qquad a^n = \prod_{k=1}^{n} a, \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k. \quad ◃$$

Als Summationsindex kann man übrigens jedes Symbol verwenden. Ebenso kann man umnummerieren. So ist beispielsweise

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1}.$$

Allgemeiner erklärt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \sum_{m \leqslant k \leqslant n} a_k := \begin{cases} a_m + .. + a_n, & m \leqslant n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

Entsprechendes gilt für Produkte.

12 **Satz** *In einem Körper gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k), \qquad a \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a b_k$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_k b_l = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant m}} a_k b_l,$$

wobei sich die Doppelsumme über alle möglichen Kombinationen der Indizes k und l mit $1 \leqslant k \leqslant n$ und $1 \leqslant l \leqslant m$ erstreckt und damit nm Summanden umfasst. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir zeigen nur die letzte Behauptung mit Induktion über n. Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage auf die korrekte Gleichung

$$a_1 \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 b_k.$$

Für $n + 1$ anstelle von n haben wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \right) \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l + a_{n+1} \sum_{l=1}^{m} b_l.$$

Ist die Gleichung wahr für n und alle $m \geqslant 1$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot \sum_{l=1}^{m} b_l = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant m}} a_k b_l + \sum_{\substack{k = n+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant m}} a_k b_l = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant l \leqslant m}} a_k b_l.$$

Also gilt sie auch für $n + 1$ und alle $m \geqslant 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Entsprechend werden andere Sätze verallgemeinert. Beispielsweise lautet die *allgemeine Dreiecksungleichung*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

Mit diesen Rechenregeln lassen sich viele Summen und Produkte ohne expliziten Rückgriff auf die vollständige Induktion bestimmen. Ein Beispiel ist die

13 **Geometrische Summe** *Für jedes reelle q und alle $n \geqslant 0$ gilt*

$$(1-q)(1+q+..+q^n) = 1-q^{n+1}.$$

Für $q \neq 1$ gilt also insbesondere

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $n = 0$ ist die Gleichungg korrekt. Sei also $n \geqslant 1$. Dann ist

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = q^0 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} - q^{n+1}.$$

Die beiden mittleren Terme annullieren sich, denn

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k.$$

Somit erhalten wir

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Das entspricht der Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Allgemeine Rekursion

Das Rekursionsprinzip mag auf den ersten Blick einleuchten, so wie auch das Induktionsprinzip. Dennoch bedarf es eines Beweises, dass durch rekursive Definitionen tatsächlich Folgen in eindeutiger Weise definiert werden. Dies leistet der folgende Satz, der durch Induktion bewiesen wird und beim ersten Lesen übergangen werden kann.

14 **Rekursionssatz** *Sei X eine beliebige Menge, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\phi_n : X^n \to X$$

eine beliebige Abbildung. Dann existiert zu jedem $a \in X$ eine eindeutige Folge $(f_n)_{n \geqslant 1}$ in X mit

$$f_1 = a, \qquad f_{n+1} = \phi_n(f_1, .., f_n), \qquad n \geqslant 1.$$

Das bedeutet, dass mit dem *Startwert* $f_1 \coloneqq a$ sukzessive die Werte

$$\begin{aligned} f_2 &\coloneqq \phi_1(f_1), \\ f_3 &\coloneqq \phi_2(f_1, f_2), \\ &\vdots \\ f_{n+1} &\coloneqq \phi_n(f_1, .., f_n) \end{aligned}$$

eindeutig erklärt sind. Die Abbildung ϕ_n definiert den nächsten Wert f_{n+1} als Funktion der ersten n Werte $f_1, .., f_n$.

Unsere bisherigen Beispielen sind allerdings viel einfacher gebaut. Alle Funktionen ϕ_n sind identisch und haben nur ein Argument.

15 *Beispiel* Die *Fibonacchifolge*

$$(f_n)_{n \geqslant 1} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..)$$

ist rekursiv erklärt durch

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Die Rekursionsvorschriften sind

$$\begin{aligned} \phi_1(f_1) &= f_1, \\ \phi_n(f_1, .., f_n) &= f_{n-1} + f_n, \qquad n \geqslant 2, \end{aligned}$$

und die Fibonacchifolge resultiert aus den Startwerten $f_1 = f_2 = 1$.

3.2 Ganze und rationale Zahlen

Definition und Satz

$$\mathbb{Z} \coloneqq \{ m - n : n, m \in \mathbb{N} \}$$

heißt Menge der ganzen Zahlen. Für diese gilt

$$\mathbb{Z} = \{ -n : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{ .., -2, -1, 0, 1, 2, .. \}.$$

3.12

⟪⟪ Sei für den Moment $Z = \{.., -2, -1, 0, 1, 2, ..\}$. Dann gilt $Z \subset \mathbb{Z}$, denn jedes Element von Z kann als Differenz zweier natürlicher Zahlen geschrieben werden.

Um auch $\mathbb{Z} \subset Z$ zu zeigen, sei $m - n \in \mathbb{Z}$. Ist $m = n$, so ist $m - n = 0 \in Z$. Ist $m > n$, so ist $m - n \in \mathbb{N} \subset Z$. Ist aber $m < n$, so ist mit demselben Argument $-(m - n) \in \mathbb{N}$ und damit $m - n$ ebenfalls Element von Z. Da damit alle Möglichkeiten erfasst sind, gilt auch $\mathbb{Z} \subset Z$. ⟫⟫

16 **Satz** *In der Menge $\mathbb{Z}$ gelten alle Axiome eines angeordneten Körpers mit Ausnahme der Existenz eines multiplikativen Inversen. Insbesondere ist die Gleichung*

$$m + x = n$$

in $\mathbb{Z}$ immer eindeutig lösbar, und zwar mit $x = n - m$. ⋊

Man sagt, die ganzen Zahlen bilden einen *Ring mit Eins*. Der Beweis dieses Satzes ist Routine.

Die Sätze vom Minimum 7 und Maximum 11 gelten in $\mathbb{Z}$ entsprechend. Der einzige Unterschied ist, dass Teilmengen von $\mathbb{Z}$ *a priori* nicht nach unten beschränkt sind. Der folgende Satz wird auf die entsprechenden Sätze für natürliche Zahlen zurückgeführt A-14.

17 **Satz vom Minimum & Maximum** *In $\mathbb{Z}$ besitzt jede nach unten beschränkte Menge ein Minimum und jede nach oben beschränkte Menge ein Maximum.* ⋊

18 ▷ *Beispiel* Die Funktion

$$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$$

weist jeder reellen Zahl x die größte ganze Zahl $m \leqslant x$ zu und wird als *Gaußklammer* bezeichnet. Andere Bezeichnungen sind *Abrundungs-* oder *Ganzzahl-Funktion*. Zum Beispiel ist

$$[\pi] = 3, \qquad [-\pi] = -4.$$

Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 1 dargestellt. ◁

Definition und Satz *Die Menge*

$$\mathbb{Q} := \{n/m : n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}\}$$

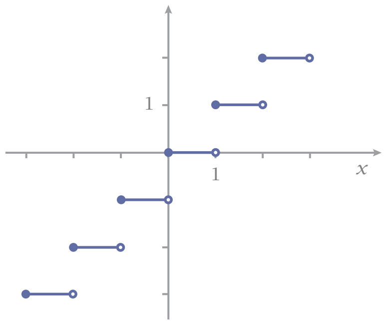
heißt Menge der rationalen Zahlen. Mit der von $\mathbb{R}$ induzierten totalen Ordnung bildet $\mathbb{Q}$ einen archimedisch angeordneten Körper. In ihm ist auch die Gleichung

$$mx = n, \qquad m \neq 0,$$

immer eindeutig lösbar, und zwar mit $x = n/m$. ⋊

Abb 1

Graph der Gaußklammer



Auch der Beweis dieses Satzes ist Routine. Es ist im Wesentlichen nur zu zeigen, dass alle Operationen nicht aus $\mathbb{Q}$ herausführen.

Bemerkung Die totale Ordnung von $\mathbb{Q}$ lässt sich auf die natürliche Ordnung von $\mathbb{Z}$ zurückführen, in dem man

$$n/m < p/q \quad :\Leftrightarrow \quad nq < mp$$

definiert. Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Darstellung einer rationalen Zahl ab, solange man verlangt, dass die Nenner positiv sind. Für verschiedene Darstellungen derselben rationalen Zahl gilt ja

$$n/m = p/q \quad \Leftrightarrow \quad nq = mp. \qquad ⊸$$

Die rationalen Zahlen bilden eine echte Teilmenge der reellen Zahlen. Sie liegen aber *dicht* in $\mathbb{R}$.

19 **Satz** *Zu zwei beliebigen reellen Zahlen $a < b$ existiert immer eine rationale Zahl r mit $a < r < b$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $a < b$. Dann ist $b - a > 0$, und es existiert 10 eine *natürliche* Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < 1/m < b - a.$$

Dies ist äquivalent mit $1 < bm - am$ oder $am + 1 < bm$. Für die nach dem Satz vom Minimum 17 existierende *ganze* Zahl

$$n \coloneqq \min\{k \in \mathbb{Z} : k > am\}$$

gilt dann $am < n \leqslant am + 1 < bm$. Division durch $m > 0$ ergibt

$$a < n/m < b.$$

Die rationale Zahl $r = n/m$ hat also die gewünschte Eigenschaft. ⟩⟩⟩⟩⟩

3.14

3.3 Eindeutigkeit der reellen Zahlen

Es ist durchaus möglich, ganz unterschiedliche *Modelle* der reellen Zahlen zu konstruieren – also total geordnete Mengen mit zwei Operationen, in denen sämtliche geforderten Axiome gelten. Diese verschiedenen Modelle sind jedoch alle von derselben Gestalt – man kann sie mitsamt ihren Strukturen eins-zu-eins aufeinander abbilden. Mathematisch gesprochen sind sie *isomorph*.

Im Fall der reellen Zahlen bedeutet dies Folgendes.

20 **Isomorphiesatz** *Sind* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ *und* $(\mathbb{K}, \boxplus, \boxtimes, \sqsubset)$ *zwei vollständige angeordnete Körper, so existiert eine bijektive Abbildung* $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *derart, dass*

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) \boxplus \Phi(y),$$
$$\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \boxtimes \Phi(y)$$

und

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x) \sqsubset \Phi(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt.* ⋊

Es spielt also zum Beispiel keine Rolle, ob ich zwei Operanden zuerst in $\mathbb{R}$ addiere und das Ergebnis mit Φ abbilde, oder ob ich zuerst die Operanden mit Φ abbilde und danach in $\mathbb{K}$ addiere.

⟨⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Für jede Abbildung Φ mit den geforderten Eigenschaften gilt beispielsweise

$$\Phi(x) = \Phi(x+0) = \Phi(x) \boxplus \Phi(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist notwendigerweise $\Phi(0) = \mathsf{0}$, das neutrale Element der Addition in $\mathbb{K}$. Analog ist $\Phi(1) = \mathsf{1}$ das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{K}$. Daher *definieren* wir

$$\Phi(0) \coloneqq \mathsf{0}, \qquad \Phi(1) \coloneqq \mathsf{1}$$

Damit ist aber Φ auch schon für alle natürlichen Zahlen festgelegt, wie beispielsweise

$$\Phi(2) = \Phi(1+1) = \Phi(1) \boxplus \Phi(1) = \mathsf{1} \boxplus \mathsf{1} = \mathsf{2}.$$

Mithilfe der Körperoperationen ist damit Φ auch für die ganzen und rationalen Zahlen eindeutig festgelegt. Mithilfe der Vollständigkeit dann auch für alle irrationalen Zahlen $_{\text{A-2.20}}$. ⟩⟩⟩⟩⟩