4. Vorlesung 13. 11. 2020

Fakultät $n!$

$$1! = 1 \quad , \quad n = 1 ,$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad , \quad n \geq 2 \; , \quad n \geq 1$$

Bsp.:

$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\vdots$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 .$$

Außerdem:

$$0! = 1$$

$$2$$

Potenzen a^n :

$$a^0 := 1 ,$$

$$a^n := a \cdot a^{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a \cdot a \qquad \text{usw.}$$

Mit Konvention:

$$\boxed{a^n a^m = a^{n+m} \; , \; (a^n)^m = a^{nm} \; , \quad n, m \geq 0}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Rekursiv:

$$\sum_{k=1}^{0} a_k := 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n, \quad n \geq 1$$

Analog zum Produkt:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \ldots a_n$$

$$\prod_{k=1}^{0} a_k := 1. \quad \ldots$$

Beispiele:

$$na = \sum_{k=1}^{n} a$$

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a$$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$0! = \prod_{k=1}^{0} k := 1 \, .$$

Bemerkung:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \qquad (\nu = \ell + 1)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell+1}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \sum_{m \le k \le n} a_k := \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \, , & m \geq n \\ 0 \, , & m < n \end{cases}$$

__Beweis__: IA: $n = 1$:

$$a_1 \cdot \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell = \sum_{\substack{1\le k\le 1\\ 1\le \ell\le m}} a_k b_\ell$$

$$= \sum_{1\le \ell\le m} a_1 b_\ell \,.$$

IS: Für n richtig. Betrachte also $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}\right) \cdot \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell}_{\text{IV}} + a_{n+1} \cdot \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell$$

$$= \sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le \ell\le m}} a_k b_\ell + \sum_{\substack{k=n+1\\ 1\le \ell\le m}} a_k b_\ell$$

$$= \sum_{\substack{1\le k\le n+1\\ 1\le \ell\le m}} a_k b_\ell \,. \qquad \blacksquare$$

A(n+1)

__Dreiecksungleichung__ :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k| \,.$$

Geometrische Summe:

$$(1-q)(1+q+q^2+\dots+q^n) = 1-q^{n+1}$$

Für $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis: $n=0$:

$$(1-q)\underbrace{(1+\dots+q^n)}_{1} = 1-q = 1-q^{n+1}\Big|_{n=0} \checkmark$$

Sei also $n \geq 1$:

$$(1-q)\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$$

$$= q^0 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} - q^{n+1}$$

$\ell = k+1$

$$= q^0 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{\ell=1}^{n} q^{\ell} - q^{n+1}$$

$$= q^0 - q^{n+1} = 1-q^{n+1}. \quad \blacksquare$$

Also:

$$f_1 := a \,,$$

$$f_2 := \phi_1(f_1)$$

$$f_3 := \phi_2(f_1, f_2)$$

$$\vdots$$

$$f_{n+1} := \phi_n(f_1, \dots, f_n) \,.$$

$$\vdots$$

In unserem Beispiel:

$\phi_n = \phi_1$ alle identisch.

Beispiel: Fibonacci-Folge:

$$(f_n)_{n \geq 1} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$$

Rekursiv:

$$f_1 := f_2 := 1 \,, \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \,, \quad n \geq 2 .$$

Also:

$$f_0 := 1$$

$$\phi_1(f_1) = f_1$$

$$\phi_n(f_1, \dots, f_n) = \phi_n(f_{n-1}, f_n)$$

$$= f_{n-1} + f_n \,.$$

Beweis: Sei

$$G = \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} .$$

Dann gilt

$$G \subset \mathbb{Z} .$$

Umgekehrt: Zz: $\mathbb{Z} \subset G$.

Sei $m-n \in \mathbb{Z}$.

Ist $m = n$, dann $m-n = 0$

Ist $m > n$, dann $m-n \in \mathbb{N}$.

Ist $m < n$, dann $-(m-n) \in \mathbb{N}$

Also auch $\mathbb{Z} \subset G$. □

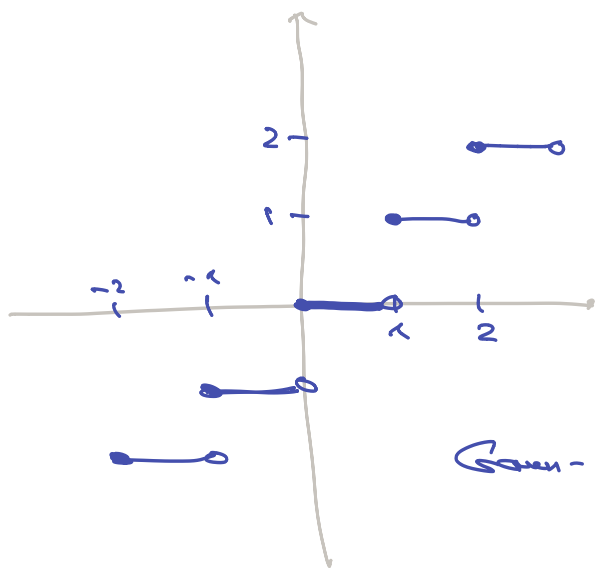
Beispiel:

$$[\cdot] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad x \longmapsto [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

Bsp:

$$[\pi] = 3,$$

$$[-\pi] = -4.$$



Gauß-Funktion.

Beweis: Sei $a < b$.

Dann $b - a > 0$, und es ex. $m \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{1}{m} < b - a \qquad | \cdot m$$

$$\Longleftrightarrow \qquad 1 < (b-a)m = bm - am$$

$$\Longleftrightarrow \qquad 1 + am < bm$$

$$n := \min\{k \in \mathbb{Z} : k > am\}$$

Dann gilt:

$$am < n \leq am + 1 < bm \qquad | : m > 0$$

Also

$$a < \underbrace{\frac{n}{m}}_{= r \in \mathbb{Q}} \leq \ldots < b. \qquad \blacksquare$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r, "+"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] \\
\mathbb{K} \times \mathbb{K} \arrow[r, "\oplus"] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Diagramm kommutiert

<u>Beweisskizze:</u> Es muss ja gelten:

$$\Phi(x) = \Phi(x+0)$$
$$\overset{!}{=} \Phi(x) \boxplus \Phi(0)$$

Also:

$$y = y \boxplus \Phi(0), \quad y \in \mathbb{K}$$

Also notwendig: $\quad \underline{0} \in \mathbb{K}$.

Entsprechend für 1.

Weise so definieren:

$$\Phi(0) = \underline{0}$$
$$\Phi(1) = \underline{1}.$$

Dann folgt:

$$\Phi(n) = \underline{n}$$

$$\Phi\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\underline{n}}{\underline{m}}$$