3

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Die Existenz der reellen Zahlen setzen wir von nun an voraus. Jetzt geht es darum, unter diesen die natürlichen, ganzen, und rationalen Zahlen zu identifizieren.

Die natürlichen Zahlen sind uns von frühester Kindheit durch das Zählen von Objekten vertraut:

$$
\begin{aligned}
1 &\coloneqq 1, \\
2 &\coloneqq 1 + 1, \\
3 &\coloneqq 2 + 1 = 1 + 1 + 1,
\end{aligned}
$$

und so weiter ...: von einer natürlichen Zahl gelangen wir zur nächsten, indem wir 1 addieren, *ad infinitum*. Auch wissen wir, dass

$$1 < 2 < 3 < \,.. \;,$$

in Übereinstimmung mit den Anordnungsaxiomen. Dies gilt übrigens in *jedem* angeordneten Körper, denn wir brauchen ja nur die Information, dass $0 < 1$. Daraus ergibt sich, dass jeder angeordnete Körper seine eigene ›Version‹ der natürlichen Zahlen enthält.

Die additiv Inversen zu den natürlichen Zahlen zuzüglich der Null ergeben den Ring der ganzen Zahlen. Die Brüche aus allen ganzen Zahlen ergeben dann den Körper der rationalen Zahlen.

3.1 Natürliche Zahlen

Um das ›und so weiter‹ der Konstruktion der natürlichen Zahlen mathematisch zu präzisieren, führen wir folgenden Begriff ein.

Definition *Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ heißt induktiv, wenn gilt:*
(IN-1) $1 \in I$.
(IN-2) *Ist $m \in I$, so ist auch $m+1 \in I$.* ⋊

Man kann auch $0 \in I$ statt $1 \in I$ fordern und damit die natürlichen Zahlen bei 0 beginnen lassen. Dies ist allein eine Frage der Konvention und mathematisch unerheblich.

▹ *Beispiele* A. Das Intervall $[1, \infty)$ ist induktiv.
B. Die Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind induktiv.
C. Die Menge $\mathbb{M}$ der rationalen Funktionen 2.2 ist induktiv.
D. Die Menge $\mathbb{P}$ aller Primzahlen ist nicht induktiv. ◃

Der Durchschnitt zweier und sogar beliebig vieler induktiver Mengen ist wieder eine induktive Menge, denn in *jeder* dieser Mengen sind die Bedingungen (IN-1) und (IN-2) erfüllt. Die kleinste solche Menge erhält man, indem man die Schnittmenge *aller* induktiven Teilmengen der reellen Zahlen bildet. Dies charakterisiert die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen.

Definition *Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.* ⋊

Bezeichnet $\mathcal{J}$ die Familie aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$, so schreibt man hierfür auch

$$\mathbb{N} := \bigcap_{I \in \mathcal{J}} I.$$

Die Menge $\mathbb{N}$ enthält also genau diejenigen Elemente von $\mathbb{R}$, die in *jeder* induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten sind.

1 **Induktionssatz** *Ist I eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$, so ist $I = \mathbb{N}$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist $I \subset \mathbb{N}$. Andererseits ist $I \in \mathcal{J}$ und damit auch $\mathbb{N} \subset I$. Also gilt $I = \mathbb{N}$. ⟩⟩⟩⟩

Vollständige Induktion

Der Induktionssatz bildet die Grundlage der vollständigen Induktion, die ebenfalls zu den fundamentalen Beweistechniken der Mathematik zählt. Die einfachste und am häufigsten gebrauchte Form ist das folgende

2 **Induktionsprinzip** *Sei $A(n)$ eine Aussageform, für die gilt:*
(1) *$A(1)$ ist wahr.*
(2) *Ist $A(n)$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*
Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. ⋊

⟨⟨⟨⟨ *Beweis* Sei

$$N := \{ n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr} \} .$$

Dann ist $1 \in N$ wegen (1), und gilt $n \in N$, so gilt auch $n+1 \in N$ wegen (2). Also ist N eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Aufgrund des Induktionssatzes $_1$ ist somit $N = \mathbb{N}$. ⟩⟩⟩⟩

Um eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n mithilfe der vollständigen Induktion zu beweisen, ist also Folgendes zu tun.
(1) *Induktionsanfang:* Zeige, dass $A(1)$ wahr ist.
(2) *Induktionsschritt:* Nehme an, dass $A(n)$ für ein beliebiges $n \geqslant 1$ wahr ist. Folgere daraus, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Das Induktionsprinzip bereitet erfahrungsgemäß anfangs Schwierigkeiten, hat es doch den Anschein, als würde man sich nach dem Münchhausenprinzip am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen. Denn im Induktionsschritt nimmt man ja an, dass $A(n)$ wahr ist – also genau das, was man eigentlich erst noch beweisen will … .

Dem ist jedoch nicht so. Der Induktionsschritt geht nur von der *Hypothese* aus, dass $A(n)$ wahr ist, und leitet daraus ab, dass auch $A(n+1)$ wahr ist. Das ist etwas völlig anderes als die *Behauptung*, dass $A(n)$ wahr ist. Diese Argumentation wird auch erst durch den Induktionsanfang vollständig. Er ist zwar oft trivial, aber trotzdem unentbehrlich. Ohne ihn wäre *nichts* bewiesen.

Eine gerne gebrauchte Metapher für die vollständige Induktion ist das Erklimmen einer Leiter. Weiß man, wie man die *erste* Sprosse einer Leiter erklimmt, und weiß man weiter, wie man von einer *beliebigen* Sprosse zur *nächsten* gelangt, so kann man jede noch so hohe Leiter erklimmen … zumindest ein Mathematiker kann das.

Die vollständige Induktion versteht man am Besten anhand von Beispielen. Daher zunächst zwei einfache Beispiele.

3 **Satz** *Für alle $n \geqslant 1$ gilt*

$$1 + 2 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \rtimes$$

⟪⟪ *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ reduziert sich die Behauptung auf

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2},$$

ist also richtig. — *Induktionsschluss:* Für ein beliebiges $n \geqslant 1$ setzen wir jetzt voraus, dass die behauptete Gleichung gilt. Dann erhalten wir für die ›nächste Sprosse der Leiter‹

$$\begin{aligned} 1 + 2 + .. + n + (n+1) &= (1 + 2 + .. + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt die behauptete Gleichung auch für $n+1$, und wir sind fertig. ⟫⟫

4 **Bernoullische Ungleichung** *Für alle reellen Zahlen $x \geqslant -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx. \quad \rtimes$$

⟪⟪ *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist

$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x.$$

Dies gilt sogar für *alle* reellen x, und auch für $n = 0$. — *Induktionsschluss:* Für ein beliebiges $n \geqslant 1$ machen wir die *Induktionsannahme*, dass

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \qquad x \geqslant -1.$$

Betrachte dann

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n.$$

Nun ist $1 + x \geqslant 0$ für $x \geqslant -1$ – hier brauchen wir erst diese Annahme –, so dass folgt

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geqslant (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + x + nx + nx^2. \end{aligned}$$

Nun ist $nx^2 \geqslant 0$. Daher folgt schließlich

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + x + nx = 1 + (n+1)x.$$

Damit ist die Induktion vollständig. ⟫⟫

Es folgen einige elementare Tatsachen über die natürlichen Zahlen, die wir natürlich beweisen müssen.

5 **Rechenregeln** *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:*
(i) $n \geqslant 1$,
(ii) $n + m \in \mathbb{N}, \quad nm \in \mathbb{N}$,
(iii) $n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}$,
(iv) $m < n \quad \Rightarrow \quad n - m \in \mathbb{N}$,
(v) $n < m \leqslant n + 1 \quad \Rightarrow \quad m = n + 1$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant 1\}$ ist eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$. Aufgrund des Induktionssatzes 1 ist sie gleich $\mathbb{N}$.

(ii) Fixiere $m \in \mathbb{N}$ und betrachte die Aussage

$$A(n): \; n + m \in \mathbb{N}.$$

Ia: Es gilt $A(1)$, da mit $m \in \mathbb{N}$ auch $m + 1 \in \mathbb{N}$. — Is: Gilt $A(n)$, so ist also $n + m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $(n + m) + 1 = (n + 1) + m \in \mathbb{N}$ und damit $A(n + 1)$ wahr. Somit gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, ist die Aussage für alle $n, m \in \mathbb{N}$ bewiesen. — Die zweite Behauptung wird analog bewiesen.

(iii) Betrachte

$$A(n): \; n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}.$$

Ia: $A(1)$ ist offensichtlich wahr. — Is: Ist $A(n)$ wahr, so ist $n \in \mathbb{N}$. Damit ist aber auch $A(n + 1)$ wahr.

(iv) Betrachte hierzu die Aussage

$$A(n): \; n - m \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m < n.$$

Ia: $A(1)$ ist wahr, denn wegen (i) gibt es kein $m \in \mathbb{N}$, für das wir die Behauptung prüfen müssen. — Is: Es gelte $A(n)$. Zu zeigen ist

$$A(n+1): \; (n + 1) - m \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m < n + 1.$$

Für $m = 1$ ist dies richtig. Ist dagegen $1 < m < n + 1$, so ist $m - 1 < n$ eine natürliche Zahl wegen (iii), und nach Induktionsannahme ist dann auch $n - (m - 1) \in \mathbb{N}$. Das ist aber äquivalent mit $(n + 1) - m \in \mathbb{N}$.

(v) Sei $n < m \leqslant n + 1$. Dann ist $m - n \leqslant 1$. Aus (iv) folgt aber $m - n \in \mathbb{N}$ und damit $m - n \geqslant 1$ wegen (i). Also ist $m - n = 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die letzte Aussage bedeutet, dass es zwischen n und $n + 1$ keine weitere natürliche Zahl gibt. Gilt also beispielsweise $n < A$ für eine Menge $A \subset \mathbb{N}$, so gilt auch $n + 1 \leqslant A$ A-5.

In manchen Fällen ist es erforderlich, die Induktion nicht bei 1, sondern später zu beginnen. Der Beweis des folgenden Satzes ist als Übung überlassen A-2.

6 **Modifiziertes Induktionsprinzip** *Sei $A(n)$ eine Aussageform, für die gilt:*
(i) *$A(n_0)$ ist wahr für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.*
(ii) *Ist $A(n)$ wahr für irgendein $n \geqslant n_0$, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*
Dann ist $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant n_0$ wahr. ⋊

▹▸ *Beispiel* Es gilt

$$2^n \geqslant n^2, \qquad n \neq 3.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ verifiziert man dies direkt, und für $n = 3$ ist die Aussage offensichtlich falsch. Für $n \geqslant 4$ führt man einen Induktionsbeweis. ◂◃

Satz vom Minimum

Die natürlichen Zahlen sind in $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt deshalb ein Infimum *innerhalb der reellen Zahlen*. Im Fall natürlicher Zahlen ist dieses Infimum sogar ein *Element von A selbst*. Man spricht von einem *minimalen Element*, an dem das Infimum *angenommen wird*.

7 **Satz vom Minimum** *Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein minimales Element. Das heißt, es existiert ein $m \in A$ mit $m \leqslant A$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen $1 \leqslant \mathbb{N}$ ist A nach unten beschränkt. Da A nicht leer ist, existiert somit die *reelle Zahl* $m = \inf A$. Zu zeigen ist, dass $m \in A$.

Da $m + 1$ keine untere Schranke von A ist, existiert aufgrund des Approximationssatzes 2.12 ein $a \in A$ mit

$$m \leqslant a < m + 1.$$

Wäre $m < a$, so folgt mit demselben Satz die Existenz eines weiteren $b \in A$ mit

$$m \leqslant b < a < m + 1.$$

Wegen $b < a$ und $a, b \in A \subset \mathbb{N}$ wäre dann $a - b$ eine natürliche Zahl 5 mit

$$a - b < m + 1 - b \leqslant m + 1 - m = 1,$$

was unmöglich ist. Also muss $m = a$ gelten, und a ist das gesuchte minimale Element in A. ⟩⟩⟩⟩⟩

8 **Korollar** *Es gibt keine uninteressanten natürlichen Zahlen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Angenommen, die Menge $U = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist uninteressant}\}$ ist nicht leer. Dann besitzt U ein minimales Element m, die kleinste uninteressante natürliche Zahl. Das ist natürlich eine interessante Zahl – Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Das Archimedische Prinzip

Bis hierher haben wir das Vollständigskeitsaxiom nicht benötigt. Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt somit in *jedem angeordneten Körper*. Somit gibt es in *jedem* angeordneten Körper $\mathbb{K}$ eine Teilmenge $\mathbb{N}$, die als kleinste induktive Teilmenge definiert ist und die wir uns als eine Version der natürlichen Zahlen in $\mathbb{K}$ vorstellen können.

Da diese Folge $1 < 2 < 3 < \cdots$ ›immer weiter wächst‹, scheint die Menge $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ unbeschränkt zu sein. Doch auch diese scheinbar offensichtliche Tatsache erfordert einen Beweis. Und wie sich herausstellt, erfordert dieser die Existenz eines Supremums, also das Vollständigkeitsaxiom.

9 **Prinzip des Archimedes** *Die Menge der natürlichen Zahlen ist in den reellen Zahlen nach oben unbeschränkt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wäre $\mathbb{N}$ beschränkt, so existierte $b = \sup \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ $_{2.10}$. Zu $b - 1 < b$ existiert dann aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b - 1 < n \leqslant b.$$

Aber dann ist $b < n + 1$, und wegen $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist b doch keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ – ein Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aus dem Prinzip des Archimedes ergeben sich zwei wichtige Folgerungen.

10 **Korollar** *Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Zu zwei positiven reellen Zahlen x und h existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(n - 1)h \leqslant x < nh.$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund des Prinzips des Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/\varepsilon$. Für dieses n gilt dann die erste Behauptung.

Aus demselben Grund ist die Menge $\{m \in \mathbb{N} : x/h < m\}$ nicht leer, besitzt also wegen des Satzes vom Minimum $_7$ ein minimales Element n. Für dieses gilt

$$n - 1 \leqslant x/h < n.$$

Multiplikation mit $h > 0$ ergibt die Behauptung. Die Eindeutigkeit von n folgt aus der Eindeutigkeit des Minimums. ⟩⟩⟩⟩⟩

11 **Satz vom Maximum** *Jede nichtleere, beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein maximales Element. Das heißt, es existiert ein $m \in A$ mit $A \leqslant m$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Beschränktheit von A und des Archimedischen Prinzips [9] besitzt A eine obere Schranke b in $\mathbb{N}$. Es ist also $A < b$. Dann ist die Menge

$$b - A \coloneqq \{b - a : a \in A\}$$

ebenfalls eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ [5] und besitzt daher ein minimales Element [7]. Dieses hat notwendigerweise die Form $b - m$ mit $m \in A$. Es gilt dann

$$b - m \leqslant b - A,$$

was äquivalent ist mit $A \leqslant m$. Somit ist $m \in A$ das maximale Element von A. ⟩⟩⟩⟩⟩

Der Beweis des archimedischen Prinzips stützt sich auf die Existenz eines Supremums [2.10], also auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Man könnte meinen, dass dies nur der Bequemlichkeit geschuldet ist, denn Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$ haben auf den ersten Blick wenig miteinander zu tun. Dem ist aber nicht so. Es gibt angeordnete Körper, in denen das archimedische Prinzip nicht gilt, wie das folgende Beispiel zeigt.

⊳ *Beispiel* Im Körper $\mathbb{M}$ der rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten [2.2] spielen die konstanten Funktionen $n/1$ die Rolle der natürlichen Zahlen, und es gilt

$$\frac{n}{1} < \frac{x}{1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $\mathbb{N}$ in $\mathbb{M}$ *beschränkt.* ⊲

Das archimedische Prinzip ist somit unabhängig von den Anordnungsaxiomen und nicht aus diesen ableitbar. Andererseits gibt es angeordnete Körper, in denen das archimedische Prinzip, nicht aber das Vollständigkeitsaxiom gilt. Daher ist folgende Definition sinnvoll.

Definition *Ein angeordneter Körper heißt archimedisch angeordnet, wenn $\mathbb{N}$ in ihm unbeschränkt ist.* ⋊

⊳ *Beispiel* $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind archimedisch angeordnete Körper, $\mathbb{M}$ nicht. ⊲

3.8