3. Vorlesung

11.11.2020

$$1 := 1$$

$$2 := 1+1$$

$$3 := 2+1 = 1+1+1$$

usw

$$1 < 2 < 3 < \dots$$

Beispiele:

1. Intervall $[1, \infty)$

2. $\mathbb{Z}$ ganze Zahlen

3. $\left\{ \frac{n}{3} : n \geq 1 \right\}$

Gegenbeispiele

4. Die Primzahlen bilden keine ind. M.

$\mathcal{J}$ Familie aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$\bigcap_{J \in \mathcal{J}} J =: \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$

induktive Menge.

Beweis: Zu zeigen nur: $\boxed{\underline{J} \subset \mathcal{N}}$

(sonst auch = zu, also auch $\subseteq$)

Andererseits ist

$$\underline{J} \in \mathcal{J}$$

$$\mathcal{N} := \bigcap_{\mathcal{J}} J \quad (\subset \underline{J})$$

Also: $\mathcal{N} = \underline{J}$.

Beweis: Sei

$$N := \{ n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr} \}$$

$$\subset \mathbb{N}$$

Dann gilt:

(i) $1 \in N$ wg (1)

(ii) Ist $n \in N$, dann auch

$n+1 \in N$ wg (2).

Also: N induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$.

Also: $N = \mathbb{N}$. $\square$

Satz:

$$\boxed{1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

Beweis: IA: $n=1$:

$$1+2+\dots+n\,\Big|_{n=1} = 1$$

$$=$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\,\Big|_{n=1} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1 \quad ✓$$

IS:

$$1+2+\dots+n+(n+1)$$

$$= \boxed{\underbrace{(1+2+\dots+n)}_{}\ \overset{A(n)}{=}\ \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ✓$$

Damit auch $A(n+1)$ richtig. ∎

Zu zeigen: $(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1, \quad n \geq 1.$

Beweis: IA: $n=1$:

$$(1+x)^1 = 1+x = 1+1\cdot x \quad ✓$$

Übrigens: auch richtig für $x < -1$, also alle $x \in \mathbb{R}$.

IS: Annahme: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -1$.

Betrachte:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\boxed{(1+x)^n}$$

$$\geq \underbrace{(1+x)}_{\geq 0 \text{ für } x \geq -1} \cdot (1+nx)$$

$$= 1 + \underbrace{x + nx}+ nx^2$$

$$= \underbrace{1 + (n+1)x} + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)x.$$

Also gilt auch:

$A(n+1)$: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$ ☺

__Beweis__: (i) $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

Betrachte $\{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \}$.

$\uparrow$ induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$

[illegible]: $= \mathbb{N}$.

(ii) Fixiere $m \in \mathbb{N}$ und betrachte die Aussage

$A(n)$: $n + m \in \mathbb{N}$.

IA: $A(1)$ ist richtig, da mit $m \in \mathbb{N}$ auch $m+1 \in \mathbb{N}$ ✓

IS: Gilt $A(n)$, so ist $n + m \in \mathbb{N}$.

Dann auch

$(n+m) + 1 \in \mathbb{N}$

$\iff (n+1) + m \in \mathbb{N}$

$\iff A(n+1)$ ist richtig. ✓

(iii) Betrachte

$A(n)$: $n = 1 \lor n-1 \in \mathbb{N}$

IA: $A(1)$ ist wahr ✓.

IS: Sei $A(n)$ wahr. Also ist $n \in \mathbb{N}$. Dann aber folgt:

$A(n+1)$ ist wahr, denn

$(n+1) - 1 = n \in \mathbb{N}$.

(iv) Betrachte:

$A(n)$: $n - m \in \mathbb{N}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$.

IA: $A(1)$ ist wahr, da es keine $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $m < 1$. (i)

IS: Es gelte $A(n)$. Zeige:

$A(n+1)$: $(n+1) - m \in \mathbb{N}$ für $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n+1$.

(Fallunterscheidung über m:) Für $m = 1$ richtig.

Ist dagegen $1 < m < n+1$, also

$m - 1 < n$ sowie wahr, dass wg (iii)

gilt $A(n)$: $n - (m-1) \in \mathbb{N}$

$\iff (n+1) - m \in \mathbb{N}$.

(c) Sei $n < m \leq n+1$. $\quad (-n$

Dann

$$m - n \leq 1$$

Aus (i) folgt $m - n \in \mathbb{N}$

Also folgt mit (i):

$$m - n = 1$$

$$\iff m = n+1.$$

Beispiel: $\quad 2^n \geq n^2 \quad$ für alle $n \geq 4$.

$n=1$: $\quad 2^1 = 2 \geq 1^2 = 1$ ✓

$n=2$: $\quad 2^2 = 4 \geq 2^2 = 4$ ✓

$n=3$: $\quad 2^3 = 8 < 3^2 = 9$ ✓

$n=4$: $\quad \ldots$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\quad 1 \leq \mathbb{N}$

$A \subset \mathbb{N}$ nicht leer ist dann unten beschränkt, besitzt also ein

$$\inf A \in \mathbb{R}$$

Beweis: Es existiert

$$m = \inf A \in \mathbb{R}.$$

Zu zeigen: $m \in A$.

Da $m+1$ keine untere Schranke von A, existiert wg Approximationssatz ein

$$a \in A : m \leq a < m+1$$

Falls $m < a$, dann ex. ein weiteres $b \in A$:

$$m \leq b < a < m+1.$$

Dann folgt:

$$\mathbb{N} \ni a - b < m+1-b \leq (m+1) - m = 1 \quad ↯$$

Also: $m = a$. $\blacksquare$

Beweis: Sei

$$U = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ ist uninteressant} \}.$$

Annahme: $U \neq \emptyset$.

Also ex. $m = \min U \in U$.

Also interessant toll

$\lightning$

$$1 < 2 < 3 < \dots \longrightarrow \infty \; ?$$

$$\sup \mathbb{N} = \infty \; ?$$

Beweis: Annahme, $\mathbb{N}$ ist beschränkt:

$\sup \mathbb{N} = b \in \mathbb{R}$ ex.

Dann ist $b-1 < b$, und es ex.

$n \in \mathbb{N}$: $b-1 < n \leq b$.

Aber dann $b < n+1 \in \mathbb{N}$

also $\mathbb{N} \nleq b$ $\lightning$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}.$$

Daher ex. $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{\varepsilon} < n$

$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Und sowieso: $\frac{1}{n} > 0$ für $n \geq 1$.

genau ein $n \geq 1$: $(n-1)b \leq x < nb$

Beweis: Betrachte

$$\{ m \in \mathbb{N} : \frac{x}{b} < m \} \neq \emptyset$$

Satz von Archimedes: es ex. eindeutiges minimales Element:

$$n-1 \leq \frac{x}{b} < n \quad , \quad | \cdot b > 0$$

Also: $(n-1)b \leq x < nb$. ∎

Beweis: $A \subset \mathbb{N}$ nicht leer, und oben beschr. Es gibt also ein $b \in \mathbb{N}$:

$$A < b .$$

Dann ist

$$b - A := \{ b-a : a \in A \} \subset \mathbb{N}$$

Also hat $b-A$ ein minimales Element von der Form $b-m$:

$$b-m \leq b-A$$

$$\iff A \leq b \quad , \quad b \in A. \quad ∎$$

Beispiel:

$$M = \left\{ f = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} : a_i, b_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$f > 0 \iff a_n b_m > 0$$

$$1 = \frac{1}{1}$$

$$n = \frac{n}{1}$$

Damit

$$1 < 2 < 3 < \ldots < \frac{x}{1}$$