7.6 Funktionenfolgen und Funktionenräume

Sei D eine beliebige Teilmenge eines normierten Raumes E, und $F(D)$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$. Wir wollen Folgen in $F(D)$ und deren Konvergenz betrachten. Für solche Folgen gibt es vielfältige Möglichkeiten, die Konvergenz gegen eine Funktion f in $F(D)$ zu definieren. Die einfachste ist die *punktweise* Konvergenz.

Definition *Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f \in F(D)$, falls $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in D$.* ⋊

Bei der punktweisen Konvergenz betrachtet man die Folge der Funktionswerte $(f_n(x))$ einzeln in jedem Punkt x, *unabhängig* von allen anderen Punkten im Definitionsbereich D. Daher werden Eigenschaften der Funktionen in der Folge – wie zum Beispiel Stetigkeit – im Limes im Allgemeinen verlorengehen.

⊳ A. Für $0 \leqslant t \leqslant 1$ gilt

$$p_n(t) := t^n \to \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

Im Raum $F([0,1])$ konvergieren also die stetigen Funktionen p_n punktweise gegen eine im Punkt 1 unstetige Funktion Abb 7.

B. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$g_n(t) := \frac{nt}{1 + |nt|} \to \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Im Raum $F(\mathbb{R})$ konvergieren also die stetigen Funktionen g_n punktweise gegen die unstetige Signumfunktion Abb 8. ◃

Ein stärkerer Konvergenzbegriff erhält die Stetigkeit beim Grenzübergang.

Abb 7

Die Parabeln $t \mapsto t^n$ auf $[0,1]$ und ihre Grenzfunktion

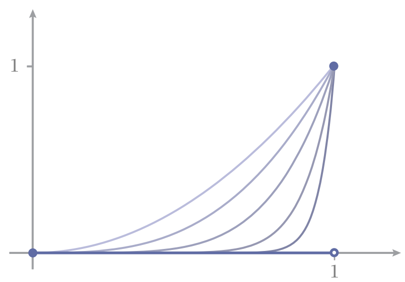
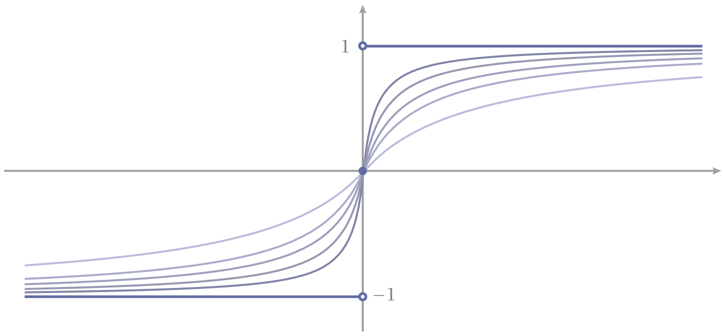


Abb 8 Die Funktionen g_n und ihre Grenzfunktion sgn



Definition *Eine Folge* (f_n) *in* $F(D)$ *konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion* $f \in F(D)$*, geschrieben* $f_n \rightrightarrows f$ *, falls für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \geqslant 1$ *existiert, so dass*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ *und* $n \geqslant N$. ⋊

Anders als bei der punktweisen Konvergenz müssen also die Folgen $(f_n(x))$ für *alle* $x \in D$ den ε-N-Test *gleichzeitig* bestehen. Anschaulich bedeutet dies, dass in jedem ε-Schlauch um den Graphen der Grenzfunktion f die Graphen fast aller Funktionen f_n liegen müssen Abb 10 .

Umgekehrt konvergiert eine Folge (f_n) *nicht gleichmäßig* gegen f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$$

für unendlich viele n gilt Abb 9 .

Unter gleichmäßiger Konvergenz bleibt Stetigkeit nun erhalten.

Abb 9

Nicht-gleichmäßige Konvergenz

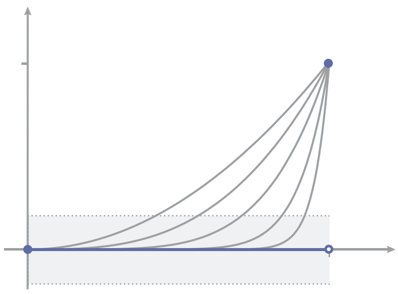
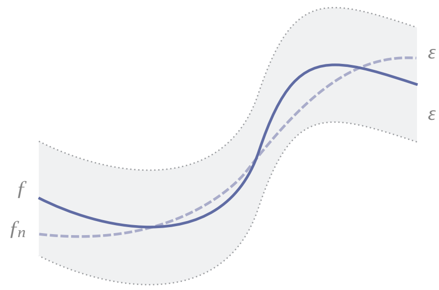


Abb 10

ε-Schlauch um f



19 **Satz** *Konvergiert die Folge (f_n) in $F(D)$ gleichmäßig gegen f und sind alle f_n stetig, so ist auch f stetig. Mit anderen Worten, der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert, gibt es ein $m \geqslant 1$, so dass

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3, \qquad x \in D.$$

Da f_m stetig ist, existiert ferner zum Punkt a ein $\delta > 0$, so dass

$$|f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/3, \qquad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Daraus folgt für f und alle $x \in U_\delta(a) \cap D$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(a)| \\ &\quad \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\ &\quad < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &\quad = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da für jedes $a \in D$ und $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, ist f stetig. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Supremumsnorm

Interessant ist, dass sich die gleichmäßige Konvergenz in $F(D)$ mithilfe einer Norm ausdrücken lässt. — Dazu definieren wir die *Supremumsnorm* über der Menge D,

$$\|f\|_D \coloneqq \sup_{x \in D} |f(x)| .$$

Für eine unbeschränkte Funktion ist allerdings $\|f\|_D = \infty$, was für eine Norm nicht zulässig ist. Erst auf Räumen *beschränkter* Funktionen wird dies tatsächlich eine *Norm*. Daher führen wir folgende Räume ein.

20 **Definition und Notiz** *Die Räume*

$$B(D) := \{ f \in F(D) : \ \|f\|_D < \infty \},$$
$$CB(D) := \{ f \in B(D) : f \text{ ist stetig} \}$$

mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_D$ sind normierte Vektorräume. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Linearkombinationen beschränkter Funktionen sind wieder beschränkt. Dasselbe gilt für stetige Funktionen. Somit sind beide Räume Vektorräume, und die Funktion $\|\cdot\|_D$ ist dort *per definitionem* endlich. Von den Normeigenschaften benötigt nur die Dreiecksungleichung etwas Aufmerksamkeit. Es ist aber aufgrund der Dreiecksungleichung des reellen Betrages

$$\begin{aligned} \|f+g\|_D &= \sup_{x\in D} |f(x)+g(x)| \\ &\leqslant \sup_{x\in D} (|f(x)|+|g(x)|) \\ &\leqslant \sup_{x\in D} |f(x)| + \sup_{x\in D} |g(x)| = \|f\|_D + \|g\|_D . \end{aligned}$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm ist nun nichts anderes als gleichmäßige Konvergenz, denn

$$\|f_n - f\|_D \leqslant \varepsilon$$

ist gleichbedeutend mit

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad x \in D.$$

Zusammen mit dem Satz über den gleichmäßigen Limes stetiger Funktionen können wir daher die letzte Notiz 20 verbessern.

21 **Satz** *Die Räume $B(D)$ und $CB(D)$ mit der Supremumsnorm sind vollständige normierte Vektorräume, also Banachräume.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten zuerst $B(D)$. Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $B(D)$ bezüglich der Supremumsnorm. Dann ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und damit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergent. Wir können daher eine Funktion $f : D \to F$ in jedem Punkt von D definieren durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in D.$$

Diese Funktion ist offensichtlich der punktweise Limes der Folge (f_n). Zu zeigen ist, dass dies auch der *gleichmäßige Limes in $B(D)$* ist – das also auch $f \in B(D)$ und $\|f_n - f\|_D \to 0$ gilt.

Nun, aus der Cauchy-Eigenschaft der Folge (f_n),

$$\|f_n - f_m\|_D = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2, \qquad n,m \geqslant N(\varepsilon),$$

folgt durch punktweisen Grenzübergang $m \to \infty$ auch $_{5.9}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N(\varepsilon), \quad x \in D.$$

Also gilt auch

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_D \leqslant \varepsilon/2, \qquad n \geqslant N(\varepsilon),$$

und damit

$$\|f_n - f\|_D < \varepsilon, \qquad n \geqslant N(\varepsilon).$$

Also konvergiert (f_n) in der Norm $\|\cdot\|_D$ gegen f.

Mit $\varepsilon = 1$ und einem geeigneten f_m folgt außerdem

$$\|f\|_D \leqslant \|f_m\|_D + 1 < \infty.$$

Also ist f beschränkt und damit $f \in B(D)$. Damit ist gezeigt, dass jede Cauchyfolge in $B(D)$ einen Grenzwert in *diesem Raum* hat. Also ist $B(D)$ vollständig.

Nun betrachten wir noch den Unterraum $CB(D)$ von $B(D)$. Sind alle f_n stetig, so ist auch f als deren gleichmäßiger Limes stetig $_{19}$. Also hat eine Cauchyfolge in $CB(D)$ einen Grenzwert, der ebenfalls wieder zu $CB(D)$ gehört. Also ist auch dieser Raum vollständig. ⟫⟫⟫

Der vorangehende Satz macht keine weiteren Annahmen über den Definitionsbereich. Dieser kann also eine beliebige Menge sein. Besonders elegant ist der Sachverhalt allerdings für kompakte Definitionsbereiche, da wir hier die Beschränktheit für stetige Funktionen nicht explizit fordern müssen.

Sei dazu

$$C(D) := \{f \in F(D) : f \text{ ist stetig}\}.$$

Es gilt dann $CB(D) = C(D) \cap B(D)$.

22 **Korollar** *Ist K kompakt, so ist der Raum $C(K)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen mit der Supremumsnorm vollständig, also ein Banachraum.* ⋊

⟪⟪⟪ Nach dem zweiten Satz vom Minimum & Maximum $_{15}$ ist jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge beschränkt. Also ist $C(K) \subset B(K)$ und deshalb auch

$$C(K) = CB(K).$$

Die Behauptung folgt dann aus dem letzten Satz $_{21}$. ⟫⟫⟫

Wir werden dieses Korollar vor allem auf die Räume $C([a,b])$ stetiger reeller Funktionen auf kompakten Intervallen anwenden.

Bemerkung Alles Vorhergehende gilt auch für Abbildungen in einen beliebigen *Banachraum* F. So bildet

$$C(D,F) \coloneqq \{f : D \to F \text{ stetig}\}$$

einen Vektorraum, und der Unterraum

$$CB(D,F) \coloneqq \{f \in C(D,F) : \|f\|_{D,F} < \infty\}$$

bildet einen Banachraum, wobei $\|f\|_{D,F} \coloneqq \sup_{x\in D} \|f(x)\|_F$. Dasselbe gilt für $C(K,F)$, wenn K kompakt ist. Die Beweise sind praktisch dieselben. ⊸

7.20