25. Vorlesung 12.2.2021

E normierte Raum

$D \subset E$

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{F}(D) = \{ f : D \to \mathbb{R} \}$

(f_n)

$f_n \xrightarrow[pw]{} f$ genau $\overbrace{f_n(x) \to f(x)}^{\text{in } \mathbb{R}}$

für jeden $x \in D$

$(f_n(x))$ Folge in $\mathbb{R}$.

Beispiele

1. Auf $D = [0,1]$:

$$f_n : \quad t^n \longrightarrow \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{f_n}_{\text{stetig}} \xrightarrow[\text{pw.}]{} \underbrace{s}_{\text{unstetig}} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}.$$

2. $D = \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{F}(\mathbb{R})$

$$g_n : \quad \frac{nt}{1 + n|t|} \longrightarrow \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{t}{|t|}, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

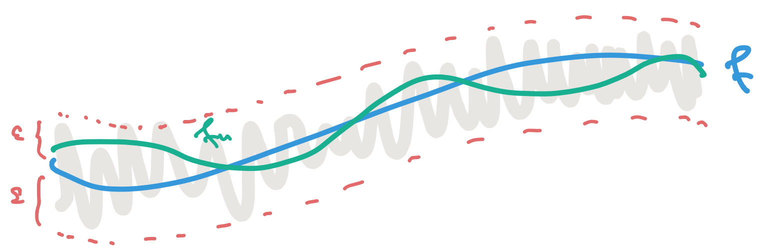
$$\underbrace{g_n}_{\text{stetig}} \xrightarrow[\text{pw}]{} \underbrace{\operatorname{sgn}}_{\text{unstetig}}.$$

$f_n \rightrightarrows f$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein N:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$

$n \geq N$:



$f_n \not\rightrightarrows f$: es gibt ein $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

für unendlich viele n.

Beweis: Sei $a \in D$, und sei $\varepsilon > 0$.

Da $f_n \rightrightarrows f$, ex. $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in D.$$

Da f_{n_ε} stetig: ex. $\delta > 0$:

$$|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Damit

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)| + |f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$= \varepsilon, \quad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Da gilt für jedes ε, und jedes $a \in D$.

Also ist f stetig auf D. ∎

Supremumsnorm für $f \in \mathcal{F}(D)$:

$$\|f\|_D := \sup_{x \in D} |f(x)| .$$

Möglich : $\|f\|_D = \infty$

$$\mathcal{B}(D) := \{ f \in \mathcal{F}(D) : \|f\|_D < \infty \}$$

$$C\mathcal{B}(D) := \{ f \in \mathcal{B}(D) : f \text{ ist stetig} \}$$

Dann: Übungsaufgabe : ✓

$\|\cdot\|_D$ tatsächlich <u>Norm</u> :

Dreiecksungleichung :

$$\|f+g\|_D = \sup_{x\in D} |f(x)+g(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in D} \big(|f(x)| + |g(x)| \big)$$

$$\leq \sup_{x\in D} |f(x)| + \sup_{x\in D} |g(x)|$$

$$= \|f\|_D + \|g\|_D .$$

$$\|f_n - f\|_D \le \varepsilon \iff |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \,,\ x \in D$$

$$\Downarrow$$

$$\|f_n - f\|_D = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

Beweis: Betrachte $\mathcal{B}(D)$ mit $\|\cdot\|_D$.

z.z.: Vollständigkeit.

Sei (f_n) eine CF in $\mathcal{B}(D)$ bzgl. $\|\cdot\|_D$.

Dann gilt: $\underbrace{(f_n(x))}_{\text{Folge in } \mathbb{R}}$ CF in $\mathbb{R}$.

Es existiert $\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$.

I.a.W.: der punktweise Grenzwert der Folge (f_n) ist wohldefiniert.

Zz: $f_n \longrightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_D$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\|f_n - f\|_D \longrightarrow 0}$$

Beweis: Da (f_n) CF: $\varepsilon > 0$ $\exists$ N:

$$\|f_n - f_m\|_D < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n, m \geq N$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n, m \geq N, \; x \in D.$$

Limes $m \to \infty$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N, \; x \in D$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_{x \in D} \text{———} \cdot \text{——} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq N$$

$$\Longleftrightarrow \quad \|f_n - f\|_D < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Damit gezeigt: $f_n \longrightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_D$.

Zn: $CB(D) \subset B(D)$.

(f_n) CF in $CB(D)$

$\implies$ (f_n) CF in $B(D)$

$\implies$ $f_n \longrightarrow f$ w.r.t. d_∞ in $B(D)$

Also: $\underbrace{f_n}_{\text{cts}} \implies \underbrace{f}_{\text{bdd}}$

Show: $f \in CB(D)$.

$\blacksquare$

Sei $D \subset \mathbb{R}$:

$$C(D) := \{ f \in F(D) : f \text{ stetig} \}$$

Dann gilt:

$$CB(D) = C(D) \cap B(D).$$

Dann: Für K kompakt:

$$C(K) \subset B(K)$$

Also: $C(K) = CB(K)$.

Anwendung: $C(\underbrace{[a,b]}_{\text{kompakt}}) = CB([a,b])$ Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_{[a,b]}$.

Ende Analysis 1