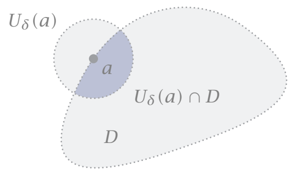
Abb 3

D-relative *δ*-Umgebung



▪ Stetigkeit

Wir charakterisieren nun Stetigkeit mit Hilfe von offenen Mengen. Da wir als Definitionsbereiche nicht nur offene, sondern beliebige Mengen $D \subset E$ zulassen wollen, definieren wir noch die Mengen

$$U_\delta(a) \cap D, \qquad \delta > 0,$$

als *D-relative Umgebungen* eines Punktes $a \in D$.

▹ A. Ist D offen und $a \in D$, so ist

$$U_\delta(a) \cap D = U_\delta(a)$$

für alle $\delta > 0$ hinreichend klein. In diesem Fall handelt es sich also um ›normale‹ Umgebungen.

B. Für ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ gilt

$$U_\delta(a) \cap [a,b] = [a, a+\delta), \qquad 0 < \delta \leqslant b - a.$$

Also ist jedes halboffene Intervall $[a, a+\delta)$ mit $0 < \delta < b - a$ eine $[a,b]$-relativ offene Umgebung von a. ◃

Bemerkung Beim ersten Lesen genügt es, jeden Definitionsbereich D einer Abbildung als offen anzunehmen. *D-relativ offen* ist dann nichts anderes als *offen* im Sinne der ersten Definition 1. ⊸

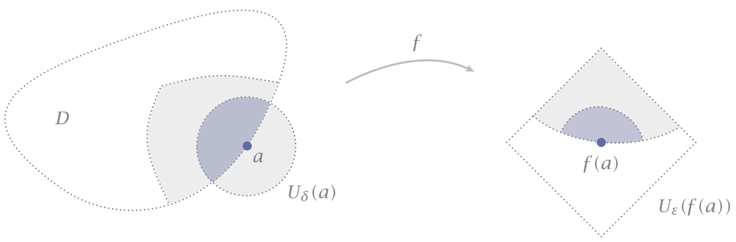
Es besteht nun folgender fundamentale Zusammenhang zwischen stetigen Abbildungen und offenen Mengen. Zuerst die lokale Situation.

8 **Satz** *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ ist stetig im Punkt $a \in D$ genau dann, wenn das Urbild jeder ε-Umgebung von $f(a)$ eine D-relative δ-Umgebung von a enthält.* ⋊

⟪⟪ ⇒ Sei f stetig in a und $U_\varepsilon(f(a))$ eine ε-Umgebung von $f(a)$. Dann existiert zu diesem ε ein positives δ, so dass

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \tag{1}$$

Abb 4 Stetiges Urbild einer ε-Umgebung mit relativer δ-Umgebung



Also gilt auch

$$U_\delta(a) \cap D \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))). \tag{2}$$

Somit enthält das Urbild dieser ε-Umgebung von $f(a)$ – die Menge rechts – wie gefordert eine D-relative δ-Umgebung von a.

$\Leftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$. Dann enthält das Urbild der ε-Umgebung von $f(a)$ eine D-relative δ-Umgebung von a. Es gilt also (2) mit einem geeigneten $\delta > 0$. Dann gilt aber auch (1). Also ist f in a stetig. ⟫⟫⟫

Um den globalen Sachverhalt zu beschreiben, nennen wir eine Menge $A \subset E$ *D-relativ offen*, wenn sie mit jedem Punkt auch eine D-relativ offene Umgebung dieses Punktes enthält. Dies ist gleichbedeutend mit der Existenz einer in E offenen Menge U, so dass $A = U \cap D$. A-3.

9 **Satz** *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ ist stetig auf D genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge in F D-relativ offen in E ist.* ⋊

⟪⟪⟪ $\Rightarrow$ Sei $W \subset F$ offen und $V = f^{-1}(W)$. Ist V leer, so ist V offen, und wir sind fertig. Ist dagegen $a \in V$, so ist $f(a) \in W$, und da W offen ist, enthält W auch eine ε-Umgebung von $f(a)$. Aufgrund des vorangehenden Satzes enthält V eine D-relative δ-Umgebung von a. Da dies für jedes $a \in V$ gilt, ist V D-relativ offen.

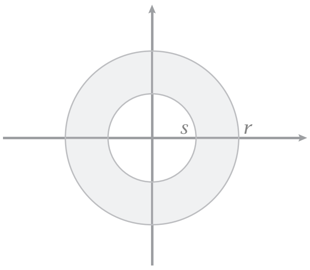
$\Leftarrow$ Mit dem vorangehenden Satz folgt, dass f in jedem Punkt von D stetig ist. Also ist f auf ganz D stetig. ⟫⟫⟫

Dieser Satz ist in zweierlei Hinsicht interessant. Einerseits charakterisiert er Stetigkeit durch rein topologische Begriffe, indem er nur Bezug auf offene und relativ-offene Teilmengen nimmt. Dies ermöglicht es, Stetigkeit in allgemeinen topologischen Räumen zu definieren, ohne Bezug auf eine Norm, Metrik oder Ähnliches. Dies werden wir allerdings im Rahmen dieser Analysis nicht weiter betrachten.

7.8

Abb 5

Der Annulus $A_{s,r}$



Andererseits können wir damit Mengen als offen erkennen, die als Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen dargestellt werden können. Dasselbe gilt dann auch für abgeschlossene Mengen als Komplemente offener Mengen:

10 **Satz** *Ist $f: E \to F$ stetig, so ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in F eine abgeschlossene Menge in E.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist A abgeschlossen in F, so ist A^c offen in F. Wegen der Stetigkeit von f ist dann auch $f^{-1}(A^c)$ offen in E. Wegen $_{\text{A-1.32}}$ $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ ist damit $f^{-1}(A)$ selbst abgeschlossen in E. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ a. Ist $f: E \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die *Nullstellenmenge* von f,

$$N(f) \coloneqq f^{-1}(0) = \{x \in E : f(x) = 0\},$$

abgeschlossen, denn dieser ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$.

b. Dasselbe gilt für jede *Niveaumenge* $M^c = f^{-1}(c)$.

c. In einem normierten Raum ist jeder *Annulus* Abb 5

$$A_{s,r} = \{x \in E : s \leqslant \|x\| \leqslant r\}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant r < \infty,$$

abgeschlossen, denn dies ist das Urbild des abgeschlossenen Intervalls $[r,s]$ unter der stetigen Normfunktion.

d. Insbesondere gilt dies für die *Einheitskugel* $\mathbb{B} = A_{0,1}$ und die *Einheitssphäre* $\mathbb{S} = A_{1,1}$. ◁

7.5 Kompaktheit

Der Beweis des Satzes vom Minimum & Maximum 16 basiert auf dem Argument, dass jede beliebige Folge innerhalb eines *abgeschlossenen Intervalls* eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu diesem Intervall gehört. Es stellt sich heraus, dass dies eine eminent wichtige und nützliche Eigenschaft gewisser Mengen ist. Sie hat daher auch einen eigenen Namen.

Definition *Eine Teilmenge K eines normierten Raumes E heißt kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu K gehört.* ⋊

Wesentlich ist, dass die Teilfolge nicht nur konvergent ist, sondern dass ihr Grenzwert ebenfalls in der Menge K liegt. — Zunächst zwei einfache Beobachtungen, wie aus kompakten Mengen neue kompakte Mengen entstehen.

11 **Satz** *Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt, und jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $K = K_1 \cup .. \cup K_n$ mit kompakten Mengen $K_1, .., K_n$. Ist (a_n) eine Folge in K, so muss wenigstens eine Menge K_i unendlich viele Folgenglieder enthalten. Die aus diesen Gliedern gebildete Teilfolge ist dann ganz in K_i enthalten. Da K_i kompakt ist, enthält sie ihrerseits eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K_i. Diese zweite Teilfolge ist dann auch in der Obermenge K konvergent. Somit ist K kompakt.

Sei nun A eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K. Ist (a_n) eine Folge in A, so auch in K. Sie besitzt somit eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K. Da A abgeschlossen ist, gehört dieser Grenzwert ebenfalls zu A. Also ist auch A kompakt. ⟩⟩⟩⟩⟩

⊳ a. Die leere Menge $\varnothing$ und jede Ein-Punkt-Menge ist kompakt.
b. Jede endliche Teilmenge eines normierten Raumes E ist kompakt.
c. Ein abgeschlossenes Intervall ist kompakt 13.
d. Offene, nichtleere Mengen sind niemals kompakt. ⊲

Wir notieren jetzt zwei *notwendige* Eigenschaften kompakter Mengen.

12 **Satz** *Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ *Abgeschlossen:* Sei K kompakt. Ist a ein Randpunkt von K, so ist a auch Grenzwert einer Folge in K. Folglich gehört auch a zu K, da K kompakt ist. Somit enthält K alle seine Randpunkte und ist abgeschlossen $_{5}$.

Beschränkt: Angenommen, K ist *nicht* beschränkt. Dann existiert zu jedem $n \geqslant 1$ ein $a_n \in K$ mit $\|a_n\| \geqslant n$. Die so gewonnene Folge in K besitzt keine konvergente Teilfolge, denn eine solche müsste ja beschränkt sein. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen *nicht*. So ist in einem *unendlich dimensionalen* Vektorraum eine abgeschlossene und beschränkte Menge im Allgemeinen nicht kompakt $_{\text{A-6}}$. Anders ist dies in endlichen Dimensionen:

13 **Satz** *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Dies ist der vorangehende Satz.

$\Leftarrow$ Sei K abgeschlossen und beschränkt und (a_n) eine Folge in K. Da K beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß $_{5.17}$ eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}). Da K abgeschlossen ist, gehört deren Grenzwert ebenfalls zu K. Also besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ A. Unter allen Intervallen sind genau die abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ kompakt.

B. Die abgeschlossene Einheitskugel $\mathbb{B}$ und die Einheitssphäre $\mathbb{S}$ im $\mathbb{R}^n$ sind kompakt.

C. Die Nullstellenmenge einer stetigen Funktion $f\colon E \to \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt ist. ◃

▪ Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen

Wir haben bereits gesehen, dass das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls wieder ein abgeschlossenes Intervall ist. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes über stetige Bilder *kompakter* Mengen.

14 **Satz** *Ist K kompakt und $f\colon K \to F$ stetig, so ist auch $f(K)$ kompakt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei (b_n) eine beliebige Folge in $f(K)$. Zu jedem n existiert mindestens ein $a_n \in K$ mit $b_n = f(a_n)$. Die Folge (a_n) besitzt in der kompakten Menge K eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit Grenzwert $a \in K$. Es gilt also $a_{n_k} \to a$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann auch

$$b_{n_k} = f(a_{n_k}) \to f(a) \in f(K).$$

Somit besitzt (b_n) eine in $f(K)$ konvergente Teilfolge. Da dies für jede beliebige Folge in $f(K)$ gilt, ist diese Menge kompakt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Jetzt betrachten wir speziell *reellwertige* Funktionen auf kompakten Mengen.

15 **Satz vom Minimum & Maximum** *Ist K kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte u und v in K mit*

$$f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v), \qquad x \in K.$$

Insbesondere gilt

$$f(u) = \inf_K f = \min_K f, \qquad f(v) = \sup_K f = \max_K f.$$

Die Funktion f nimmt also auf K ihr Infimum und Supremum an und ist beschränkt. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach dem vorangehenden Satz ist $f(K)$ kompakt in $\mathbb{R}$ und damit beschränkt. Also ist zum Beispiel $m = \inf_K f > -\infty$. Wie im vorangehenden Beweis existiert eine Folge (u_n) in K mit $f(u_n) \to m$. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit Grenzwert $u \in K$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann

$$f(u) = \lim f(u_{n_k}) = \lim f(u_n) = m.$$

Das Infimum wird also bei u angenommen. Entsprechend für das Supremum. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Gleichmäßige Stetigkeit

Bei der ε-δ-Charaktersierung der Stetigkeit hängt die Wahl von δ im Allgemeinen vom betrachten Punkt ab. ›Funktioniert‹ dagegen ein δ für alle Punkte, so spricht man von *gleichmäßiger* Stetigkeit.

Definition *Eine Abbildung $f: E \supset D \to F$ heißt gleichmäßig stetig auf D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in D$ gilt:*

$$\|u - v\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(u) - f(v)\|_F < \varepsilon. \qquad ⋊$$

▷ a. Jede lipschitzstetige Abbildung ist gleichmäßig stetig.
b. Die Wurzelfunktion ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.
c. Die Funktion $t \mapsto t^{-1}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$. ◁

Eine stetige Funktion ist nicht notwendigerweise gleichmäßig stetig, wie das letzte Beispiel zeigt. Auf kompakten Definitionsbereichen ist dies anders.

16 **Satz** *Ist K kompakt und $f: K \to F$ stetig, so ist f sogar gleichmäßig stetig.* ⋊

⟪⟪⟪ Angenommen, f ist auf K *nicht* gleichmäßig stetig. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geqslant 1$ zwei Punkte $u_n \neq v_n$ in K mit

$$\|u_n - v_n\|_E < \frac{1}{n}, \qquad \|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geqslant \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, besitzt die Folge (u_n) eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit Grenzwert a in K. Wegen $\|u_n - v_n\|_E < 1/n$ konvergiert auch (v_{n_k}) gegen denselben Grenzwert a. Dann aber ist

$$\lim_{n\to\infty} \|f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})\|_F = \|f(a) - f(a)\|_F = 0,$$

ein Widerspruch zu $\|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geqslant \varepsilon$ für alle n. ⟫⟫⟫

Wir werden diesen Satz erst in der mehrdimensionalen Analysis benötigen, zum Beispiel bei der Vertauschbarkeit von Differenziation und Integration.