24. Vorlesung 10. 2. 2021

E, F normierte Räume,

$f: E \supset D \longrightarrow F$

$a \in D$: $U_\delta(a) \cap D$

D-relative δ-Umgebung von a.

Beispiele: 1. D offen und $a \in D$:

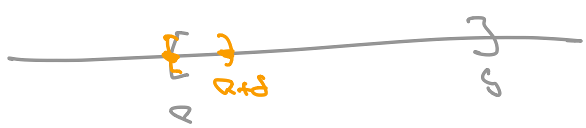
$U_\delta(a) \subset D$ für δ klein.

Also: $U_\delta(a) \cap D = U_\delta(a)$.

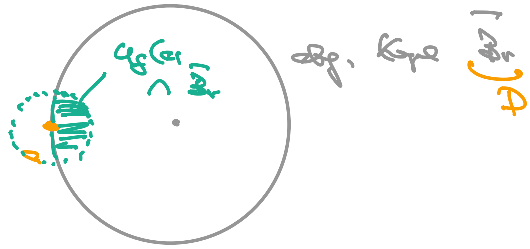
2. Abgeschlossenes Intervall $\underbrace{[a,b]}_{D}$

$U_\delta(a) \cap [a,b] = [a, a+\delta)$

$U_\delta(a) \cap [a,b]$



3.



Beweis: "$\Longrightarrow$" Sei f stetig in a.

Sei $\varepsilon > 0$:

$U_\varepsilon(f(a))$

Dann $\delta > 0$:

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a))$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{U_\delta(a) \cap D} \subset \underbrace{f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))} \checkmark$$

"$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Annahme:

ein ex. $\delta > 0$:

$$U_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$$

$\Longrightarrow$

$$f(\qquad) \subset U_\varepsilon(f(x)),$$

Also ex. zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$:

$$f(U_\delta(x) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(x)). \checkmark$$

$D \subset E$ fest:

$A \subset E$ D-relativ offen:

Zu jedem $a \in A$ gibt es eine Umgebung $U(a)$ mit

$$U(a) \cap D \subset A.$$

D offen: D-relativ offen = offen.

Beweis: "$\Longrightarrow$"

Sei $f: E \supset D \to F$ stetig.

Sei $W \subset F$ offen.

$U = f^{-1}(W)$.

(i) $U = \emptyset$ ist offen ✓

(ii) $U \neq \emptyset$, also $x \in U$.

Dann $f(x) \in W$ offen

$\underset{\text{ex. } \varepsilon > 0}{\Longrightarrow}$ $U_\varepsilon(f(x)) \subset W$

$\underset{\text{ex. } \delta > 0}{\Longrightarrow}$ $f(U_\delta(x) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(x))$

$\Longrightarrow$ $U_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$

$\subset f^{-1}(W)$

Da dies für jeden Punkt $x \in U$ möglich ist: $f^{-1}(W)$ D-relativ offen.

"$\Longleftarrow$" Übungsaufgabe: angewandt auf $\underbrace{U_\varepsilon(f(x))}$

offen in W

Also f ist in jedem Punkt stetig

also f insgesamt auf D stetig. qed

Beweis: Sei $A \subset F$ abgeschlossen.

Dann $A^c = F \setminus A$ offen.

Da f stetig:

$f^{-1}(A^c)$ offen in E

Es gilt:

$$f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$$

Also gilt:

$\left(f^{-1}(A)\right)^c$ offen in E

$\Longrightarrow \left(f^{-1}(A)\right)^{cc} = f^{-1}(A)$ abgeschlossen. $\blacksquare$

Beispiele:

1. $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Nullstellenmenge

$$N(f) = \{x \in E : f(x) = 0\}$$
$$= f^{-1}(\{0\})$$
$$= f^{-1}(0)$$

$\{0\}$ abgeschlossen.

2. Dasselbe gilt für die Niveaumenge

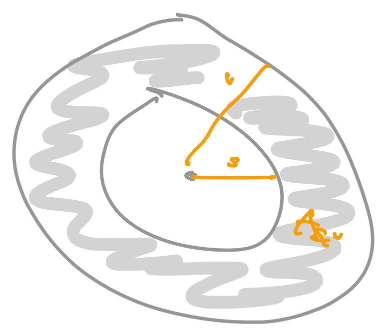
$$M^c = F^{-1}(c) = F^{-1}(\{c\})$$

$M^c = \emptyset$ auch abgeschlossen!

3. E :

$$A_{s,r} = \{ x \in E : s \leq |x| \leq r \},$$

wobei $0 \leq s \leq r < \infty$



abgeschlossen, denn!

$$\underbrace{A_{s,r}}_{\text{abg.}} = \underbrace{F^{-1}}_{\text{stetig}} (\underbrace{[s,r]}_{\text{abg.}}),$$

$$F = |\cdot|$$

4. [illegible] : $s = 0$, $r = 1$: $\overline{B}_1(0)$

$s = r = 1$: $A_{1,1} = S = \{x \in E : |x| = 1\}$

$$= F^{-1}(\{1\}).$$

Beweis: (a)

$$K = K_1 \cup \ldots \cup K_n .$$

Sei (x_n) Folge in K.

Also ex. ν, so dass K_ν unendlich viele Folgenglieder enthält.

K_ν enthält eine Teilfolge.

Da K_ν kompakt: ex. konvergente Teilfolge, deren Grenzwert zu K_ν gehört.

Also ist K kompakt.

(b) Sei $A \subset K$ abgeschlossen.

Sei (x_n) beliebige Folge in $A \subset K$.

Also besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge.

Der Grenzwert gehört zu A, da A abgeschlossen. $\square$

Beispiele:

1. $\emptyset$, $\{x\}$ kompakt

2. Jede endliche Menge ist kompakt.

3. Ein abgeschlossenes Intervall

$$[a,b] \subset \mathbb{R},$$

$$-\infty < a \leq b < \infty.$$

ist kompakt.

Bem: (a,b) nicht kompakt.

4. Offene, nichtleere Menge sind nicht kompakt.

Beweis: Abgeschlossen:

Sei K kompakt, $K \neq \emptyset$.

Sei $a \in \partial K$. Dann ex. eine Folge (a_n) in K und $\Leftarrow$ kompakt

$$a_n \to a.$$

Also: $a \in K$.

Also: $\partial K \subset K \Rightarrow K$ ist abg.

Beschränkt: Angenommen, K ist nicht beschränkt.

Dann ex. zu jedem $n \geq 1$ ein

$$a_n \in K: \quad \|a_n\| \geq n.$$

Damit Folge (a_n) in K, die keine konvergente Teilfolge besitzt: denn jede Teilfolge ist unbeschränkt.

Beweis: $\Rightarrow$ s.o.

$\Leftarrow$ Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abg. und beschr., (a_n) Folge in K.

Da K beschränkt: Bolzano-Weierstraß:
es gibt konvergente Teilfolge:
$$a_{n_k} \longrightarrow a \in \mathbb{R}^n$$

Da K abgeschlossen: $a \in K$. $\square$

Beispiele:

1. Intervalle in $\mathbb{R}$:
kompakt genau $[a,b]$
zusätzlich $\emptyset$.

2. im $\mathbb{R}^n$: Einheitskugel und -sphäre:
$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$
$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$

Beweis: Sei (b_n) beliebige Folge in $f(K)$.

Zu jedem b_n wähle ein $a_n \in K$:

$$f(a_n) = b_n.$$

Damit (a_n) Folge in K.

Da K kompakt: ex. konvergente Teilfolge:

$$a_{n_k} \longrightarrow a \in K.$$

Da f stetig:

$$\underbrace{f(a_{n_k})}_{b_{n_k}} \longrightarrow f(a) \in f(K).$$

Damit Teilfolge $b_{n_k} \longrightarrow b = f(a)$ in K.

∎

Bem.: Also ist

$f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt

also beschränkt.

Bemerke $a_n = \inf_K f > -\infty$. .

Dann ex. eine Folge (a_n) in K sodass

$$f(a_n) \longrightarrow m.$$

Da K kompakt: ex. konvergente Teilfolge:

$$a_{n_k} \longrightarrow a \in K.$$

Da f stetig:

$$f(a_{n_k}) \longrightarrow f(a), \qquad f(a_{n_k}) \longrightarrow m$$

∎

Beispiele:

1. Lipschitzstetige Abb. sind glm. stetig:

$$\| f(x) - f(y) \|_F \leq L \cdot \| x - y \|_E$$

2. $\sqrt{} : [0, \infty)$ ist glm. stetig.

aber nicht Lipschitz.

3. $f(t) = \frac{1}{t} : (0, \infty) \to (0, \infty)$

nicht glm. stetig.

$f(t) = t^2$.

Beweis: Angenommen, f ist nicht glm. stetig.

Es gibt also ein $\varepsilon > 0$:

und für jedes $n \geq 1$ ex. $u_n, v_n \in K$:

$$\boxed{\underbrace{\|u_n - v_n\|_E}_{(\ast\ast)} < \frac{1}{n}, \quad \text{aber} \quad \underbrace{\|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geq \varepsilon.}}$$

Damit Folge (u_n), (v_n) in K.

Da K kompakt:

$$u_{n_k} \longrightarrow u \in K.$$

$(\ast\ast) \Longrightarrow$
$$v_{n_k} \longrightarrow u$$

Dann aber gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \overbrace{\|f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})\|_F}^{\geq \varepsilon > 0} = \|f(u) - f(u)\| = 0. \;\lightning$$