7

Stetigkeit II

7.4 Topologische Grundbegriffe

Der Begriff der Stetigkeit ist eng mit dem Begriff der Umgebung verbunden. Dieser Begriff, und die damit verbundenen Begriffe wie *offene* und *abgeschlossene Menge*, spielen eine fundamentale Rolle für die Analysis.

Wir führen diese Begriffed hier nur für normierte Räume ein, da dies für unsere Zwecke völlig ausreicht und noch hinreichend anschaulich ist.

Offene Mengen

Sei E ein beliebiger normierter Raum. Mit Hilfe der δ-Umgebungen eines Punktes a in E,

$$U_\delta(a) \coloneqq \{x \in E : \|x - a\| < \delta\},$$

definieren wir den grundlegenden topologischen Begriff der *offenen Menge*.

1 **Definition** *Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt offen, wenn sie mit jedem Punkt auch eine δ-Umgebung dieses Punktes enthält. Zu jedem $a \in A$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(a) \subset A$.* ⋊

▹ *Beispiele* A. In $\mathbb{R}$ mit der Betragsnorm $|\cdot|$ ist jedes offene Intervall

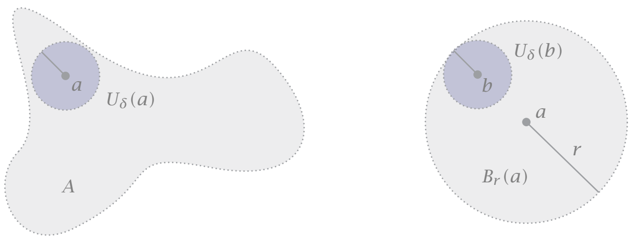
$$(a,b) \subset \mathbb{R}, \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty,$$

topologisch offen. Denn für jedes $c \in (a,b)$ ist $\delta = \min\{c - a, b - c, 1\} > 0$, und für dieses δ gilt

$$U_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta) \subset (a,b).$$

Dies gilt auch für $a = -\infty$ und $b = \infty$. Die Bezeichnung ›offenes Intervall‹ ist somit konsistent mit der obigen Definition von ›offen‹.

Abb 1 Offene Menge A und offene Kugel $B_r(a)$



B. Die Intervalle $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ sind ebenfalls offen in $\mathbb{R}$.

C. In einem normierten Raum E ist jede *offene Kugel*

$$B_r(a) \coloneqq \{x \in E : \|x-a\| < r\}, \qquad r > 0,$$

topologisch offen. Denn für $b \in B_r(a)$ ist $\rho = \|b-a\| < r$ und $\delta = r - \rho > 0$. Damit gilt $U_\delta(b) \subset B_r(a)$, denn für jedes $x \in U_\delta(b)$ ist

$$\|x-a\| \leqslant \|x-b\| + \|b-a\| < \delta + \rho = r.$$

Da jeder Punkt in $B_r(a)$ eine solche Umgebung besitzt, ist $B_r(a)$ offen. Die Bezeichnung ›offene Kugel‹ ist somit konsistent mit der obigen Definition.

D. Ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ ist *nicht* offen in $\mathbb{R}$, denn jede Umgebung von a oder b enthält auch Punkte, die nicht zu $[a,b]$ gehören.

E. Ein-Punkt-Mengen sind nicht offen.

F. Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$, aber aufgefasst als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{R}$ nicht offen. Daher ist es gelegentlich wichtig anzugeben, auf welchen Raum man sich bezieht, wenn man von einer offenen Menge spricht. ◅

Der folgende Satz beschreibt die grundlegenden topologischen Eigenschaften offener Mengen.

2 **Satz** *In einem normierten Raum E gilt:*

(i) *$\varnothing$ und E sind offen.*

(ii) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

(iii) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.* ⋊

Bemerkung In der allgemeinen Theorie topologischer Räume spielen diese Eigenschaften die Rolle von *Axiomen* für Familien offener Mengen. Eine beliebige Familie von Teilmengen einer Menge X heißt eine *Topologie auf X*, wenn sie diese drei Eigenschaften besitzt. ⊸

⟪⟪⟪ (i) Die leere Menge ist offen, da es gar keine Punkte gibt, für die eine Umgebung gebraucht wird. E ist offen, da E jede Umgebung enthält.

(ii) Sei $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen von E und

$$a \in \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda.$$

Dann ist $a \in A_\mu$ für wenigstens ein $\mu \in I$. Da A_μ offen ist, enthält A_μ auch eine Umgebung $U_\delta(a)$ von a. Somit gilt auch

$$U_\delta(a) \subset A_\mu \subset \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda.$$

Also ist die Vereinigung ebenfalls offen.

(iii) Sei $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ eine *endliche* Familie offener Teilmengen von E und

$$a \in \bigcap_{1\leqslant k\leqslant n} A_k.$$

Dann gibt es zu jedem $1 \leqslant k \leqslant n$ ein $\delta_k > 0$ derart, dass $U_{\delta_k}(a) \subset A_k$. Es ist $\delta = \min\{\delta_1, .., \delta_n\} > 0$, und für dieses δ gilt dann

$$U_\delta(a) \subset U_{\delta_k}(a) \subset A_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Also gilt auch

$$U_\delta(a) \subset \bigcap_{1\leqslant k\leqslant n} A_k.$$

Somit ist auch dieser Durchschnitt offen. ⟫⟫⟫

Bemerkungen *a.* Die Indexmenge I in (ii) ist völlig beliebig. Sie kann auch überabzählbar sein.

b. Wesentlich für (iii) ist offensichtlich, dass das Minimum *endlich* vieler positiver Zahlen wieder positiv ist. Dies gilt *nicht* für unendlich viele positive Zahlen, und (iii) ist im Allgemeinen auch falsch für unendlich viele Durchschnitte. So ist beispielsweise

$$\bigcap_{n\geqslant 1} (-2^{-n}, 2^{-n}) = \{0\}$$

nicht offen. ⊸

▪ Abgeschlossene Mengen

Abgeschlossene Mengen werden als Komplemente offener Mengen erklärt.

Definition *Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A^c = E \setminus A$ offen ist.* ⋊

▹ *Beispiele* A. Die Intervalle $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, denn $\varnothing^c = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^c = \varnothing$ sind offen.

B. Jedes abgeschlossene Intervall $[a,b]$ ist abgeschlossen, denn

$$[a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

ist offen.

C. Ebenso sind $[a,\infty)$ und $(-\infty,b]$ abgeschlossen.

D. Die *abgeschlossenen Kugeln*

$$\bar{B}_r(a) := \{x \in E : \|x-a\| \leqslant r\}, \qquad r \geqslant 0,$$

sind abgeschlossen. Denn für $b \notin \bar{B}_r(a)$ ist $\rho = \|b-a\| > r$, $\delta = \rho - r > 0$, und

$$U_\delta(b) \cap \bar{B}_r(a) = \varnothing.$$

Also ist das Komplement von $\bar{B}_r(a)$ offen, und $\bar{B}_r(a)$ selbst ist abgeschlossen.

E. Einpunktige Mengen sind abgeschlossen, denn $\{a\} = \bar{B}_0(a)$.

F. Halboffene beschränkte Intervalle, also $[a,b)$ und $(a,b]$, sind weder offen noch abgeschlossen. ◃

Es folgen die grundlegenden topologischen Eigenschaften abgeschlossener Mengen.

3 **Satz** *In einem normierten Raum E gilt:*

(i) *$\varnothing$ und E sind abgeschlossen.*
(ii) *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
(iii) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Für *beliebige* Familien von Teilmengen eines Raumes gelten die *Regeln von de Morgan* A-1.15,

$$\Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c = \bigcap_\lambda A_\lambda^c, \qquad \Big(\bigcap_\lambda A_\lambda\Big)^c = \bigcup_\lambda A_\lambda^c.$$

Damit folgen alle Aussagen über abgeschlossene Mengen aus den entsprechenden Aussagen über offene Mengen, indem man die Komplemente betrachtet 1. ⟩⟩⟩⟩

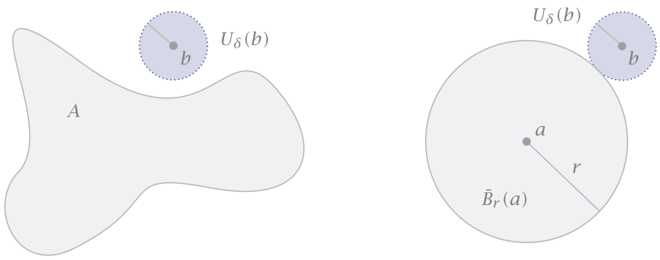
▹ A. Jede endliche Punktmenge ist abgeschlossen, denn diese ist die endliche Vereinigung von Ein-Punkt-Mengen, welche abgeschlossen sind.

B. Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist im Allgemeinen nicht mehr abgeschlossen. Beispielsweise ist

$$\bigcup_{n \geqslant 1} [-1+2^{-n}, 1-2^{-n}] = (-1,1)$$

eine offene Menge. ◃

Abb 2 Abgeschlossene Menge A und abgeschlossene Kugel $\bar{B}_r(a)$



Bemerkung Man beachte, dass ›abgeschlossen‹ nicht die logische Negation von ›offen‹ darstellt. Denn der Gesamtraum und die leere Menge sind gleichzeitig offen *und* abgeschlossen. Ebenso gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind. ⊸

▪ Rand, Inneres und Abschluss

Das Konzept der offenen und abgeschlossen Mengen wird klarer, wenn wir daneben noch den *Rand* einer Menge betrachten.

4 **Definition** *Sei $A \subset E$ eine beliebige Menge. Ein Punkt $a \in E$ heißt Randpunkt von A, wenn jede Umgebung von a Punkte sowohl aus A wie auch aus A^c enthält. Der Rand ∂A einer Menge A ist die Menge aller ihrer Randpunkte.* ⋊

Umgekehrt ist ein Punkt a *kein Randpunkt* von A, wenn er eine Umgebung $U(a)$ besitzt, die entweder ganz in A oder ganz in A^c enthalten ist.

▷ A. $\partial\varnothing = \varnothing$ und $\partial E = \varnothing$.
B. $\partial[a,b] = \partial(a,b) = \{a,b\}$.
C. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
D. $\partial B_r(a) = \{x \in E : \|x-a\| = r\}$ für $r > 0$.
E. $\partial A = A$ für $A = [a,b] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. ◁

5 **Satz** *Für jede Menge $A \subset E$ gilt:*
(i) $\partial A = \partial(A^c)$.
(ii) *∂A ist abgeschlossen.*
(iii) *A ist offen genau dann, wenn $\partial A \cap A = \varnothing$.*
(iv) *A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\partial A \subset A$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) Dies folgt aus $(A^c)^c = A$ und damit der Symmetrie der Definition bezüglich A und A^c.

(ii) Ist $a \notin \partial A$, so gibt es eine Umgebung $U(a)$, die ganz in A oder ganz in A^c enthalten ist. Damit ist aber *jeder Punkt* in $U(a)$ kein Randpunkt von A, also

$$U(a) \subset (\partial A)^c.$$

Also ist das Komplement von ∂A offen, und ∂A selbst ist abgeschlossen.

(iii) Ist A offen, so gibt es zu jedem Punkt $a \in A$ eine Umgebung $U(a)$, die ganz in A enthalten. Also ist kein Punkt in A ein Randpunkt von A. Enthält umgekehrt A keine Randpunkte, so muss es zu jedem $a \in A$ eine Umgebung $U(a)$ geben, die ganz in A enthalten ist, denn keine Umgebung von a kann ganz in A^c enthalten sein.

(iv) AE ist abgeschlossen genau dann, wenn A^c offen ist, also it (*(iv)*) genau dann, wenn $\partial A \cap A^c = \varnothing$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\partial A \subset A$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Somit ist eine Menge offen genau dann, wenn sie keinen ihrer Randpunkte, und abgeschlossen genau dann, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält. Auf diese Weise kann man jeder Menge auch ihr *Inneres* und ihren *Abschluss* zuordnen.

6 **Definition** *Sei $A \subset E$ eine beliebige Menge. Dann heißen*

$$A^\circ \coloneqq A \setminus \partial A, \qquad A^- \coloneqq A \cup \partial A$$

das Innere oder der offene Kern respektive der Abschluss von A. ⋊

Aus der Definiton folgt unmittelbar

$$A^\circ \subset A \subset A^-, \qquad \partial A = A^- \setminus A^\circ.$$

Außerdem erhalten wir folgende Charakterisierung.

7 **Satz** *Sei $A \subset E$. Dann ist A° offen, A^- abgeschlossen, und A ist*

(i) *offen genau dann, wenn $A = A^\circ$,*

(ii) *abgeschlossen genau dann, wenn $A = A^-$.* ⋊

▹ A. Es gilt $\varnothing^\circ = \varnothing^- = \varnothing$ und ebenso $E^\circ = E^- = E$.

B. Für $I = [a,b)$ ist $I^\circ = (a,b)$ und $I^- = [a,b]$.

C. Für die rationalen Zahlen gilt $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$ und $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}$.

D. Für $r \geqslant 0$ gilt $\bar{B}_r(a)^\circ = B_r(a)$.

E. Für $r > 0$ gilt $B_r(a)^- = \bar{B}_r(a)$, aber nicht für $r = 0$.

F. Für $A = [a,b) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ist

$$A^\circ = \varnothing, \qquad A^- = [a,b] \times \{0\}.$$ ◃