23. Vorlesung 5.2.2021

E beliebiger normierter Raum,

$\|\cdot\|$:

$$U_\delta(a) := \{x \in E : \|x-a\| < \delta\}$$

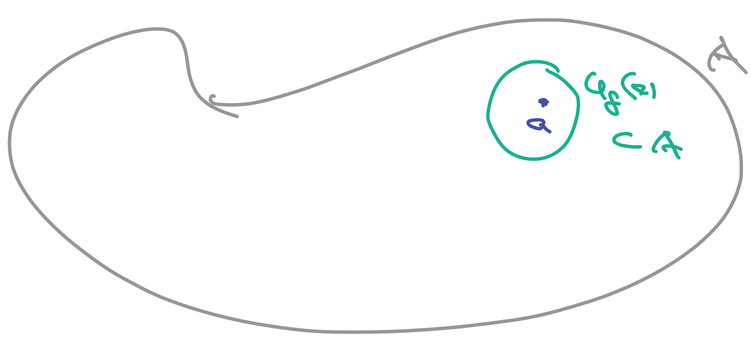
δ-Umgebung von $a \in E$.

$A \subset E$: heißt offen:

für jeden Punkt $a \in A$

ex. ein $\delta > 0$:

$U_\delta(a) \subset A$.



Beispiele:

1. $\mathbb{R}$, $|\cdot|$:

$(a,b) \subset \mathbb{R}$, $\quad -\infty < a < b < \infty$

ist offen:

Sei $c \in (a,b)$:

$\delta := \min\big(|c-a|, |c-b|\big) > 0$

und

$$B_\delta(c) \subset (a,b)$$

$$= (\underbrace{c-\delta}_{a \leq}, \underbrace{c+\delta}_{\leq b}).$$

2. Gilt auch für $a = -\infty$ und/oder $b = +\infty$.
Also auch für $\mathbb{R}$.

3. Gilt auch $\emptyset \subset \mathbb{R}$.

4. E normierter Raum:

$$B_r(a) := \{ x \in E : \|x-a\| < r \}, \quad r > 0$$

offene Kugel um a mit Radius $r > 0$

ist offene Menge:

Sei $b \in B_r(a)$: $\rho := \|b-a\| < r$, und

$$\delta := r - \rho > 0.$$

Dann gilt:

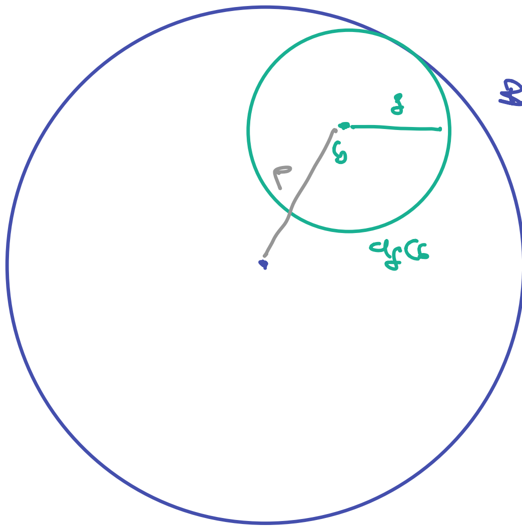
$$U_\delta(b) \subset B_r(a):$$

Sei $x \in U_\delta(b)$:

$$\|x-a\| \leq \|x-b\| + \|b-a\| < \delta + \rho = r$$

Also $x \in B_r(a)$:

$$U_\delta(b) \subset B_r(a).$$



$B_r(a) \supset U_\delta(b)$

5. $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a \le b$

ist nicht offen:

denn jede δ-Umgebung von a enthält Punkte, die nicht in $[a,b]$

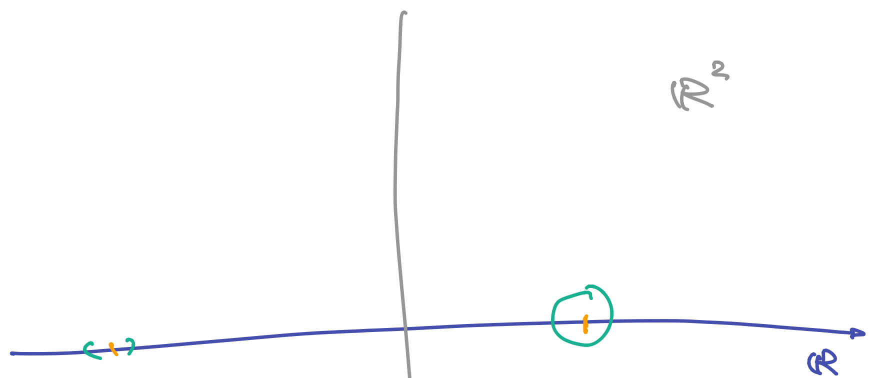
Skizze:

6. Ein-Punkt-Top. in E:

$\{a\}$: nicht offen:

Umgebung enthält Punkte $\neq a$.

7.



$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$

offen.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

nicht offen

Beweis:

(i) $\emptyset$ offen ✓

E offen ✓

(ii) Sei $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ Familie offener Mengen

und

$a \in \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$.

Dann

$a \in \underbrace{A_\mu}_{\text{offen}}$ für ein $\mu \in I$.

Daher

$U_\varepsilon(a) \subset A_\mu$

Dann:

$U_\varepsilon(a) \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ ✓

(iii) Sei $(A_k)_{1 \le k \le n}$ endliche Familie offener M.

$$x \in \bigcap_{1 \le k \le n} A_k .$$

Dann $x \in \underbrace{A_k}_{\text{offen}}$ für jedes $1 \le k \le n$.

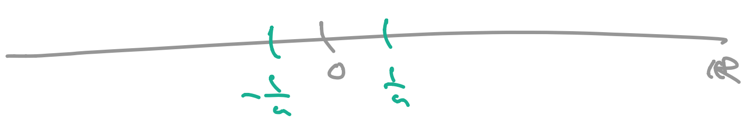
Dann: $U_{\delta_k}(x) \subset A_k$, $1 \le k \le n$

Dann $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$

und $U_\delta(x) \subset A_k$, $1 \le k \le n$

$$\Rightarrow \quad U_\delta(x) \subset \bigcap_{1 \le k \le n} A_k . \qquad \checkmark$$

Beispiel: $A_n = \underbrace{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}_{\text{offen}} \subset \mathbb{R}$



$\bigcap_{n \ge 1} A_n = \{0\}$ <u>nicht</u> offen.

__Beispiele:__

1. $E = \mathbb{R}$:

   $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind __abgeschlossen__:

   $\emptyset^c = \mathbb{R}$ ist offen.

   $\mathbb{R}^c = \emptyset$ ist offen.

2. Abgeschlossene Intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a \leq b$

   sind abgeschlossen:

   $$\underline{[a,b]^c} = \underbrace{\underbrace{(-\infty,a)}_{\text{offen}} \cup \underbrace{(b,\infty)}_{\text{offen}}}_{\text{offen}}.$$

3.

$$\overline{B}_r(a) := \{ x \in E : \|x-a\| \le r \}$$

abgeschlossene Kugel

zeige abgeschlossen !

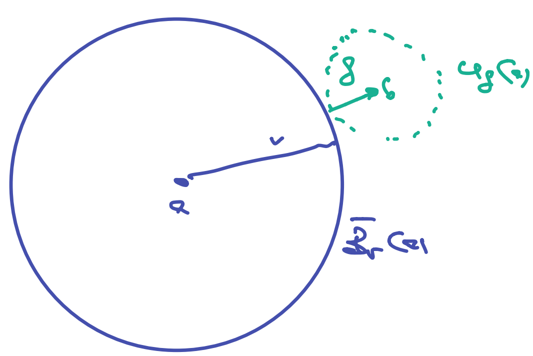
$(\overline{B}_r(a))^c$ ist offen :

$b \in (\overline{B}_r(a))^c$: $\|b-a\| > r$

Wähle : $\delta = \|b-a\| - r > 0$

Dann gilt :

$$\underbrace{U_\delta(b) \cap \overline{B}_r(a)}_{\text{Dreiecksungleichung!}} = \emptyset$$



4. Ein-Punkt-Mengen $\{a\} \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen:

$$\{a\} = \bar{B}_0(a),$$

5. $(a,b]$ und $[a,b)$ sind weder offen noch abgeschl.

$\blacksquare$

Lemma: de Morgan:

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda\Big)^c = \bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda^c$$

$$\Big(\bigcap_{\lambda} A_\lambda\Big)^c = \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda^c .$$

(ii) Durchschnitt beliebig vieler abgeschl. Mengen:

$$\Big(\bigcap_{\lambda\in I} \underbrace{A_\lambda}_{\text{abg}}\Big)^c = \underbrace{\bigcup_{\lambda\in I} \underbrace{A_\lambda^c}_{\text{offen}}}_{\text{offen}}$$

$$\Downarrow$$

$$\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda \text{ abg.}$$

$\blacksquare$

Exemple: 1. Orice mulțime finită este închisă.

$$A = \underbrace{\underbrace{\{x_1\}}_{\text{înch.}} \cup \dots \cup \underbrace{\{x_n\}}_{\text{înch.}}}_{\text{înch.}}$$

2. $$\left[-1 + \frac{1}{2^n}, \ 1 - \frac{1}{2^n}\right]$$

$$\bigcup \left[\ \_\_ , \ \_\_\ \right] = (-1, 1). \quad \text{desch.}$$

Beispiele :

1. $\partial \emptyset = \emptyset$,

$\partial E = \emptyset$.

2. $\partial [a,b] = \{a,b\}$

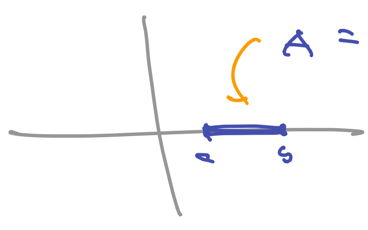
$\partial (a,b) = \{a,b\}$

3. $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

4. $B_r(a) = \{x \in E : |x-a| < r\}$

$\partial B_r(a) = \{x \in E : |x-a| = r\}$

5. $A = [a,b] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$



$\partial A = A$.

(i) $\partial A = \partial(A^c)$:

Denn: $(A^c)^c = A$

(ii) ∂A ist abgeschlossen.

Z.z.: $(\partial A)^c$ ist offen:

Sei $x \in (\partial A)^c$, so ist x kein Randpunkt von A,

Also: es gibt $U_\delta(x)$ mit

$$U_\delta(x) \subset A \quad \text{oder} \quad U_\delta(x) \subset A^c$$

jeder Punkt kein Randpunkt von A

Also:

$$U_\delta(x) \subset (\partial A)^c$$

Also: $(\partial A)^c$ ist offen. .

(iii) "$\Rightarrow$" Sei A offen.

Zu jedem $a \in A$ ex.

$$U_\delta(a) \subset A$$

Kein Punkt von $U_\delta(a)$ ist Randpunkt von A:

Also:
$$A \cap \partial A = \emptyset.$$

"$\Leftarrow$" Annahme: $\partial A \cap A = \emptyset$,

d.h. A enthält kein Randpunkt von A.

D.h. jeder Punkt $a \in A$ hat Umgebung $U_\delta(a)$:

$$U_\delta(a) \subset A \quad \text{oder} \quad \cancel{U_\delta(a) \subset A^c}$$

Also:
$$U_\delta(a) \subset A.$$

Also ist A offen.

(iv) A abg $\Longleftrightarrow$ A^c offen

$$\Longleftrightarrow A^c \cap \partial(A^c) = \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow A^c \cap \underline{\partial A} = \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\partial A} \subset A.$$

$\blacksquare$

$A^\circ = A \setminus \partial A$ Innere

$\bar{A} = A^- = A \cup \partial A$ Abschluss

$$\boxed{\begin{array}{c} A^\circ \subset A \subset A^- \\ \partial A = A^- \setminus A^\circ \end{array}}$$

Beispiele :

1. $\emptyset$: $\emptyset^\circ = \emptyset^- = \emptyset$

   E : $E^\circ = E^- = E$.

2. $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$:

   $I^\circ = (a, b)$

   $I^- = [a, b]$

3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. G

4. $r \geq 0$: $(\bar{B}_r(a))^\circ = B_r(a)$

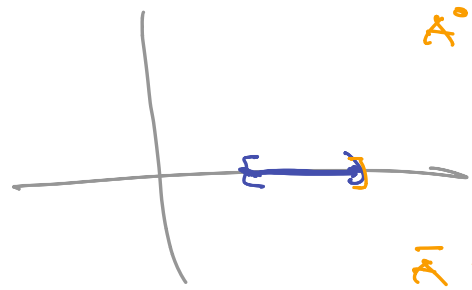
   $r=0$: $\{a\}$ $\emptyset$

5. $r>0$: $\qquad (B_r(a))^- = \overline{B}_r(a)$

Diskret T_i $\quad r \geq 0$: $\emptyset$ $\qquad$ (!

6. $\qquad A = (a,b) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$

$A^\circ = \emptyset$



$\overline{A} = [a,b] \times \{0\}.$