9.5 Exp, Sin und Cos im Komplexen

Die Funktionen $\sin$, $\cos$ und $\exp$ können kaum unterschiedlicher sein: $\sin$ und $\cos$ sind periodisch, beschränkt und besitzen unendlich viele Nullstellen, $\exp$ dagegen ist streng monoton, unbeschränkt, und ohne jede Nullstelle.

Tatsächlich handelt es sich um ein und dieselbe Funktion. Der Zusammenhang wird erkennbar, wenn wir diese auch für *komplexe* Argumente betrachten. Da die Potenzreihenentwicklungen von $\exp$, $\sin$ und $\cos$ für komplexe Argumente ebensogut wie für reelle Argumente konvergieren, ist folgende Definition gerechtfertigt.

Definition *Für $z \in \mathbb{C}$ ist*

$$\exp z \coloneqq \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$$

sowie

$$\sin z \coloneqq \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z \coloneqq \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \qquad \rtimes$$

Die Theorie der Potenzreihen zeigt, dass diese Funktionen auch im Komplexen beliebig oft differenzierbar sind und man ihre Ableitungen durch gliedweises Differenzieren erhält. Zum Beispiel gilt

$$\exp' z = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} = \exp z.$$

Entsprechend gilt $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Ausmultiplizieren liefert außerdem die Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

Hieraus folgt beispielsweise, dass die Exponenzialfunktion auch im Komplexen *keine Nullstelle* hat.

Momentan brauchen wir diese Resultate jedoch nicht. Uns genügt folgende grundlegende Identität.

16 **Eulersche Formel** *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z). \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Da die exp-Reihe absolut konvergiert, können wir sie beliebig umordnen $_{6.6}$. Mit $\mathrm{i}^{2n} = (-1)^n$ für alle $n \geqslant 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}z) &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z).\end{aligned}$$

Setzen wir π ein, so erhalten wir mit $\sin \pi = 0$ und $\cos \pi = -1$ die berühmte

17 **Eulersche Gleichung** $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$. ⋊

Viele Mathematiker halten sie für die schönste Gleichung der Mathematik. Sie verbindet ihre fünf wichtigsten Zahlen,

$$0, \quad 1, \quad \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}, \quad \pi$$

auf gelegentlich mystisch anmutende Weise.

Insbesondere für reelle t ist

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

immer ein Punkt auf dem Einheitskreis $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, denn

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Identifizieren die komplexe Zahl $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ in $\mathbb{C}$ mit dem Punkt $(\cos t, \sin t)$ in $\mathbb{R}^2$, so können wir das Ergebnis von Satz 14 wie folgt formulieren.

18 **Satz** *Die Funktion*

$$\operatorname{cis} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

bildet $[0, 2\pi)$ *bijektiv auf den Einheitskreis* $\mathbb{S}$ *ab und ist periodisch mit der Periode* 2π. ⋊

›cis‹ ist ein Akronym für ›cos + i sin‹. Diese Abbildung wickelt also die reelle Gerade gleichmäßig mit der Periode 2π so um den Einheitskreis, dass aufgrund der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus $_{10}$

$$\operatorname{cis}(s+t) = \operatorname{cis}(s)\operatorname{cis}(t),$$

oder kürzer

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Es handelt sich also um einen *Endomorphismus* der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die multiplikative Gruppe $(\mathbb{S}, \cdot)$.

Umgekehrt führt die Funktionalgleichung für $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ zu den Additionstheoremen für $\sin$ und $\cos$. Einerseits ist aufgrund der Eulerschen Gleichung 17

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+t)} = \cos(s+t) + \mathrm{i}\sin(s+t).$$

Andererseits ist dies aufgrund der Funktionalgleichung für exp 3 gleich

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} &= (\cos s + \mathrm{i}\sin s)(\cos t + \mathrm{i}\sin t) \\ &= (\cos s\cos t - \sin s\sin t) + \mathrm{i}\,(\sin s\cos t + \cos s\sin t).\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt dann die Additionstheoreme. Ebenso leicht erhält man die *Formeln von Moivre*,

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt,$$

aus denen mit den binomischen Formeln Identitäten für $\sin nt$ und $\cos nt$ folgen.

Schließlich gilt

$$\cos t = \Re\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}, \qquad \sin t = \Im\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}.$$

Beginnt man das Studium der Speziellen Funktionen mit der exp-Funktion im Komplexen, und insbesondere der cis-Funktion, so werden cos und sin mithilfe dieser Formeln *definiert*. Auf diesem Weg fallen diese Funktionen allerdings gewissermassen ›vom Himmel‹. Der Zugang über die Schwingungsgleichung illustriert dagegen das allgemeine Phänomen, dass viele wichtige Funktionen durch Differenzialgleichungen definiert werden und ihre Eigenschaften sich auch aus diesen ableiten lassen.

▪ Polardarstellung komplexer Zahlen

Bisher kennen wir die *kartesische Darstellung* $z = a + \mathrm{i}b$ komplexer Zahlen. Die cis-Funktion ermöglicht die ebenso nützliche *Polardarstellung*.

19 **Satz** *Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existieren genau ein $r > 0$ und ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass*

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Die reelle Zahl φ heißt das Argument der komplexen Zahl $z \neq 0$. ⋊

9.18

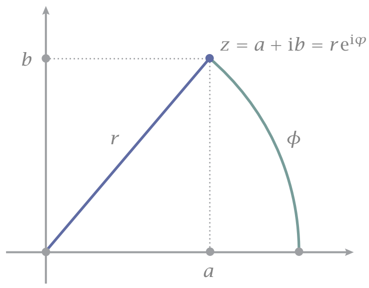


Abb 9

Polardarstellung einer komplexen Zahl

⟨⟨⟨⟨⟨ Gibt es eine solche Darstellung, so ist notwendigerweise $r = |z|$, und

$$\frac{z}{r} = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}$$

bestimmt eindeutig $\varphi \in [0, 2\pi)$ [18]. Umgekehrt kann jede komplexe Zahl $z \neq 0$ geschrieben werden als $z = |z|\,\theta$ mit $\theta \in \mathbb{S}$, und es existiert [18] genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wegen der Periodizität der cis-Funktion gilt dann auch

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + 2\pi n)}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Das Argument einer komplexen Zahl $\neq 0$ ist also bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π erklärt. Für $z = 0$ dagegen ist das Argument nicht erklärt.

Mithilfe der Polardarstellung finde wir leicht alle Wurzeln einer komplexen Zahl. Zuerst betrachten wir die Wurzeln aus 1.

20 **Satz** *Es gibt genau n verschiedene komplexe n-te Wurzeln der Zahl 1, die sogenannten n-ten Einheitswurzeln*

$$\theta_n^k \coloneqq \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k/n}, \qquad k = 0, .., n-1. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Offenbar ist 0 *keine* Wurzel aus 1. Somit können wir für die gesuchten Wurzeln $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ansetzen. Dann gilt

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = 1$$

genau dann, wenn $r = 1$ und

$$n\varphi = 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{n}\,k$$

für eine ganze Zahl k. Also ist $z = \theta_n^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies sind genau n verschiedene Punkte [18], zum Beispiel für $k = 0, .., n-1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Nun noch der allgemeine Fall.

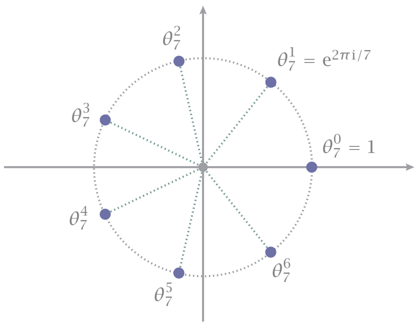


Abb 10

Die sieben Einheitszwerge

21 **Satz** *Zu jeder komplexen Zahl* $z = re^{i\psi} \neq 0$ *gibt es genau* n *verschiedene* n*-te Wurzeln*

$$w_k = w_0\theta_n^k, \qquad k = 0, .., n-1,$$

mit $w_0 = r^{1/n}e^{i\psi/n}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Für w_0 gilt sicher $w_0^n = z$. Ist w irgendeine weitere n-te Wurzel von z, so ist w/w_0 eine n-te Einheitswurzel, also gleich θ_n^k für ein $0 \leqslant k < n$. Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

9.6 Die Hyperbelfunktionen

22 **Satz und Definition** *Es gibt jeweils genau eine auf der reellen Geraden zweimal differenzierbare Lösung der Differenzialgleichung* $\varphi'' = \varphi$ *mit*

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

respektive

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0.$$

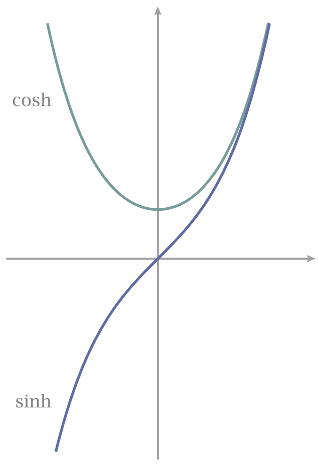
Diese werden Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus genannt und mit sinh *respektive* cosh *bezeichnet. Sie sind reell analytisch und besitzen die Darstellung*

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \qquad ⋊$$

Abb 11

Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus



⟪⟪⟪ Man verifiziert sofort, dass die angegebenen Funktionen die Gleichung $\varphi'' = \varphi$ erfüllen und die geforderten Anfangswerte haben. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen ergibt sich wie bei der Exponenzialfunktion. ⟫⟫⟫

Diese Funktionen sind natürlich ebenso in der ganzen komplexen Ebene erklärt. Wir beschränken uns hier aber auf die reellen Aspekte. Der Beweis des folgenden Satzes ist als Übung überlassen.

23 **Satz** *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $\sinh(-t) = -\sinh t, \quad \cosh(-t) = \cosh t,$

(ii) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$

(iii) $\sinh t = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}t, \quad \cosh t = \cos \mathrm{i}t.$ ⋊

Die Funktion sinh steigt streng monoton auf ganz $\mathbb{R}$ und bildet die reelle Gerade bijektiv auf sich selbst ab. Die Funktion cosh fällt streng monoton auf $(-\infty, 0]$ und wächst streng monoton auf $[0, \infty)$ und bildet beide Intervalle bijektiv auf $[1, \infty)$ ab. Siehe Abbildung 11 für ihre Graphen.

Der Tangens hyperbolicus wird analog zum ›klassischen‹ Tangens gebildet:

24 **Definition und Satz** *Der Tangens hyperbolicus ist auf $\mathbb{R}$ definiert durch*

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

und bildet die reelle Gerade streng monoton steigend und surjektiv auf $(-1, 1)$ ab. ⋊

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, dass sinh und tanh ohne Einschränkung umkehrbar sind, während bei cosh dessen Einschränkung auf $[0, \infty)$ um-

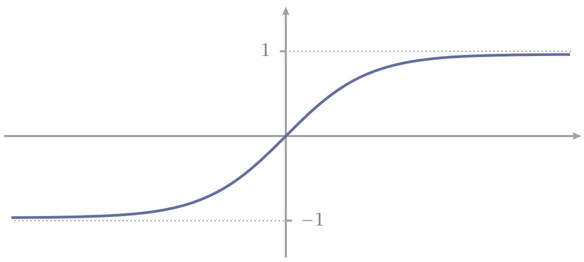


Abb 12

Tangens hyperbolicus

kehrbar ist. Deren Umkehrungen werden *Areasinus hyperbolicus*, *Areatangens hyperbolicus* und *Areacosinus hyperbolicus* genannt und mit arsinh, artanh und arcosh, respektive, bezeichnet.

Da die Hyperbelfunktionen durch die Exponenzialfunktion dargestellt werden, können diese Areafunktionen durch die Logarithmusfunktion dargestellt werden:

25 **Satz** *Für* $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ *und* $\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ *gilt im Innern ihrer Definitionsbereiche*

$$\operatorname{arsinh} t = \log(t + \sqrt{t^2+1}), \qquad \operatorname{arcosh} t = \log(t + \sqrt{t^2-1})$$

sowie

$$\operatorname{artanh} t = \frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte

$$t = \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}, \qquad t \geqslant 0.$$

Dann ist $t \geqslant 1$ und $2t e^s = e^{2s} + 1$, oder

$$e^{2s} - 2t e^s + 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für e^s mit den beiden Lösung

$$e^s = t \pm \sqrt{t^2-1}.$$

Von diesen ist nur die Pluslösung größer oder gleich 1. Somit ist

$$s = \operatorname{arcosh} t = \log(t + \sqrt{t^2-1}).$$

Die beiden übrigen Identitäten erhält man auf analoge Weise. ⟩⟩⟩⟩⟩

Zum Schluss listen wir noch sämtliche Ableitungen auf. Die einzelnen Rechnungen sind eine einfache Übung.

26 **Satz** *Im Innern der jeweiligen Definitionsbereiche gilt*

$$\sinh' t = \cosh t, \qquad \cosh' t = \sinh t, \qquad \tanh' t = 1 - \tanh^2 t$$

sowie

$$\operatorname{arsinh}' t = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \operatorname{arcosh}' t = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}},$$

und

$$\operatorname{artanh}' t = \frac{1}{1-t^2}. \qquad \rtimes$$