Im Folgenden geht es darum, die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktionen zu bestimmen. Die Potenzreihenentwicklungen sind dabei allerdings wenig hilfreich. So sieht man ihnen nicht im Geringsten an, dass sie periodische Funktionen definieren. Vielmehr stützen wir uns im Folgenden auf die Differenzialgleichung.

10 **Satz** *Für alle* $s, t \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i) $\sin(-t) = -\sin(t), \quad \cos(-t) = \cos(t)$,
(ii) $\sin'(t) = \cos(t), \quad \cos'(t) = -\sin(t)$,
(iii) $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$,
(iv) $\sin(s+t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)$,
(v) $\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die ersten zwei Behauptungen folgen unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung. Die nächste Behauptung ergibt sich aus

$$(s^2 + c^2)' = 2ss' + 2cc' = 2sc - 2cs = 0,$$

wobei $s = \sin$ und $c = \cos$. Die Funktion $s^2 + c^2$ ist somit konstant und gleich ihrem Wert 1 bei 0. Die letzten beiden Gleichungen ergeben sich aus dem Eindeutigkeitssatz. Denn beide Seiten jeder Gleichung sind Lösungen der Gleichung $\varphi'' = -\varphi$ mit denselben Anfangswerten bei 0. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aussage (i) bedeutet, dass der Sinus eine ungerade, der Cosinus eine gerade Funktion ist. Ihre Graphen sind demnach symmetrisch zum Ursprung respektive zur Ordinatenachse.

▪ Die Zahl π

Wir kommen nun zur Zahl π, einer der wichtigsten Zahlen der Mathematik. Wir definieren sie als die erste positive Nullstelle der Sinusfunktion.

Im Folgenden sei immer $s = \sin$ und $c = \cos$.

11 **Satz und Definition** *Es gibt eine eindeutig bestimmte reelle Zahl* $\pi > 0$, *so dass*

$$\sin(\pi) = 0$$

sowie $\sin(t) > 0$ *für* $0 < t < \pi$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aus Stetigkeitsgründen gibt es wegen $c(0) = 1$ ein $\delta > 0$, so dass

$$c(t) > 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \delta.$$

Wegen $s' = c$ 10 ist s strikt wachsend auf $[0, \delta]$?? und damit

$$s(t) > 0, \qquad 0 < t \leqslant \delta.$$

Zu zeigen bleibt damit, dass s überhaupt eine positive Nullstelle besitzt. Dann ist das Infimum aller positiven Nullstellen die kleinste positive Nullstelle von s.

Angenommen, es ist $s > 0$ auf $(0, \infty)$. Dann ist c wegen $c' = -s$ dort streng fallend, und es gibt zwei Möglichkeiten: c hat eine positive Nullstelle, oder eben nicht. Im ersten Fall gibt es auch ein a mit $c(a) < 0$. Dann aber wäre wegen der Monotonie von c

$$s'(t) = c(t) \leqslant c(a) < 0, \qquad t \geqslant a.$$

Also fällt s ab dem Punkt a mit nicht nachlassender Rate und muss daher doch eine Nullstelle haben. Im anderen Fall aber wäre s wegen $s' = c$ strikt wachsend, und aus

$$c'(t) = -s(t) \leqslant -s(a) < 0, \qquad t \geqslant a,$$

folgt analog wie zuvor, dass jetzt c eine Nullstelle rechts von a haben müsste.

In beiden Fällen gelangen wir also zu einem Widerspruch. Also hat sin doch eine positive Nullstelle, und wir sind fertig. ⟩⟩⟩⟩⟩

12 **Satz** *Die Cosinusfunktion bildet das Intervall* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend auf* $[-1, 1]$ *ab, und es gilt*

$$\cos(\pi/2) = 0, \qquad \sin(\pi/2) = 1. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund des letzten Satzes ist

$$c'(t) = -s'(t) < 0, \qquad 0 < t < \pi.$$

Also ist c streng monoton fallend auf $[0, \pi]$. Aus 10 $c^2(t) + s^2(t) = 1$ für alle t und $s(\pi) = 0$ folgt weiter $c^2(\pi) = 1$. Da aber bereits $c(0) = 1$, muss

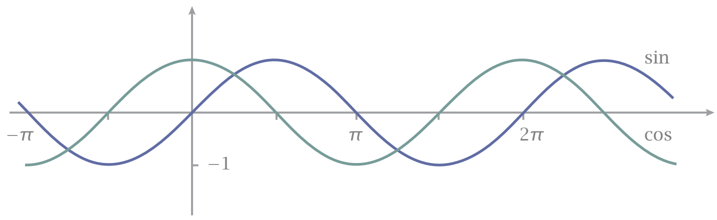
$c(\pi) = -1$ gelten. Mit den Additionstheoremen des vorletzten Satzes 10 ist dann noch

$$0 = s(\pi) = 2s(\pi/2)c(\pi/2).$$

Wegen $s(\pi/2) > 0$ ist also und $c(\pi/2) = 0$ und weiter $s(\pi/2) = 1$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Nun können wir feststellen, dass sin und cos *periodische Funktionen* sind.

Abb 3 Sinus und Cosinus



13 **Satz** *Sinus und Cosinus sind antiperiodisch mit der Periode* π *und daher periodisch mit der Periode* 2π. *Das heißt, es gilt*

$$\sin(t+\pi) = -\sin(t), \qquad \sin(t+2\pi) = \sin(t),$$

und dasselbe für $\cos$. *Außerdem gilt*

$$\sin(t+\pi/2) = \cos(t), \qquad \cos(t+\pi/2) = -\sin(t). \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Dies folgt direkt aus den Additionstheoremen für $\sin$ und $\cos$ 10 und deren speziellen Werten bei $\pi/2$ und π. Zum Beispiel ist

$$\sin(t+\pi) = \sin(t)\cos(\pi) + \cos(t)\sin(\pi) = -\sin(t). \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Für den Graphen der Sinusfunktion bedeutet dies zum Beispiel:
- Verschiebung um 2π führt ihn in sich selbst über,
- Verschiebung um π *und* Spiegelung an der x-Achse ebenso,
- Verschiebung um $-\pi/2$ ergibt den Graphen der Cosinusfunktion.

Die Graphen dieser Funktionen sehen daher wie in Abbildung 3 aus.

▪ Der Schul-Sinus

Bis jetzt ist noch nicht klar, was dieser Sinus mit dem ›Schul-Sinus‹ zu tun hat. Um dies zu klären, sei

$$\mathbb{S} \coloneqq \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

der Einheitskreis in der euklidischen Ebene, und

$$\mathbb{S}_+ = \mathbb{S} \cap \{y \geqslant 0\}, \qquad \mathbb{S}_- = \mathbb{S} \cap \{y \leqslant 0\}$$

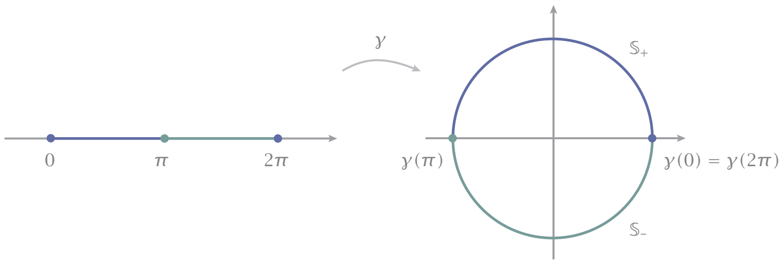
dessen obere respektive untere Hälfte.

14 **Satz** *Die Abbildung*

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

bildet $[0,\pi]$ *bijektiv auf* $\mathbb{S}_+$ *und* $[\pi, 2\pi]$ *bijektiv auf* $\mathbb{S}_-$ *ab.* ⋊

Abb 4 Die Abbildung $\gamma\colon\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$



⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen $s^2(t) + c^2(t) = 1$ und $s(t) \geqslant 0$ auf $[0,\pi]$ ist klar, dass

$$\gamma\colon\ [0,\pi] \to \mathbb{S}_+.$$

Da der Cosinus dort streng monoton fällt $_{12}$, ist diese Abbildung injektiv. Und sie ist surjektiv, denn zu jedem $x \in [-1,1]$ existiert ein $t \in [0,\pi]$ mit
$c(t) = x$, und dort ist

$$s(t) = \sqrt{1 - c^2(t)} = \sqrt{1 - x^2} = y.$$

Die Behauptung zu $\gamma\colon [\pi, 2\pi] \to \mathbb{S}_-$ folgt analog. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aus den beiden letzten Sätzen folgt, dass der Punkt $\gamma(t)$ eine Bahn gegen den Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}$ beschreibt, beginnend beim Punkt $\gamma(0) = (1,0)$ und periodisch mit Periode 2π. Sein Geschwindigkeitsvektor ist

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t),$$

und seine Absolutgeschwindigkeit ist konstant,

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Die Länge der Bahn vom Punkt $\gamma(0)$ zum Punkt $\gamma(t)$ ist demnach t — dies wird noch genauer im Kapitel über Kurven erklärt werden. Nimmt man diese Länge t als das *Bogenmaß* des zwischen den Punkten $\gamma(0)$, $(0,0)$ und $\gamma(t)$ eingeschlossenen Winkels, so erhält man die geometrische Definition des Sinus und Cosinus wie in Abbildung 5:

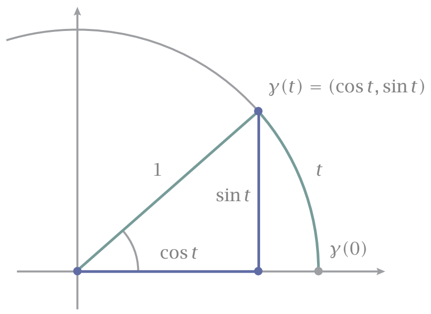
$$\sin t = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \cos t = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

wobei im Einheitskreis die Hypotenuse die Länge 1 hat.

9.12

Abb 5

Schul-Sinus und Schul-Cosinus



9.4 Tangens und Arcusfunktionen

Mit Sinus und Cosinus verbunden sind einige weitere trigonometrische Funktionen. Wir erwähnen noch den Tangens, die übrigen übergehen wir.

Definition und Satz *Der Tangens ist auf* $\{t \in \mathbb{R} : \cos t \neq 0\}$ *definiert durch*

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Er ist ungerade, π-periodisch und stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\tan' t = 1 + \tan^2 t. \quad ⋊$$

⟪⟪⟪ Der Quotient einer geraden und einer ungeraden Funktion ist immer ungerade. Ferner ist 13

$$\tan(t + \pi) = \frac{\sin(t + \pi)}{\cos(t + \pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Die stetige Differenzierbarkeit folgt aus der Quotientenregel und

$$\tan' t = \frac{\sin' t \cos t - \sin t \cos' t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t,$$

da cos auf dem Definitionsbereich von tan nirgends verschwindet. ⟫⟫⟫

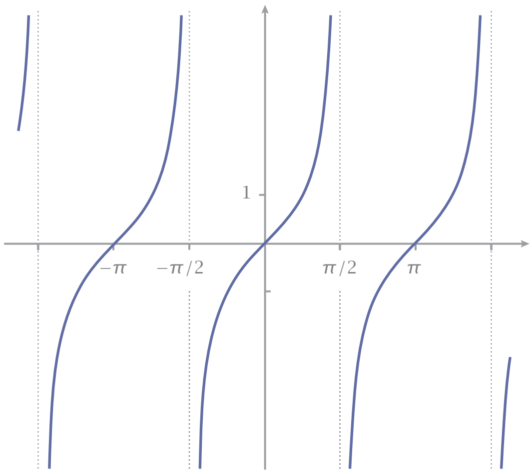
Bemerkung Der Tangens ist natürlich ebenfalls reell analytisch. Wir benötigen seine Taylorreihe jedoch nicht. ⊸

▪ Arcusfunktionen

Die Umkehrfunktion der exp-Funktion ist die log-Funktion. Was sind die Umkehrfunktionen von sin, cos und tan?

Abb 6

Tangens



Umkehrbarkeit setzt Injektivität voraus. Eine *periodische* Funktion ist aber geradezu die Antithese einer injektiven Funktion – sie wiederholt sich ja ständig. Um die betreffenden Funktionen ›umkehrbar zu machen‹, müssen wir sie daher auf geeignete Intervalle *einschränken*. Hierfür gibt es zwar unendlich viele Möglichkeiten, doch die Einschränkungen

$$\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}, \qquad \cos|_{[0,\pi]}, \qquad \tan|_{(-\pi/2,\pi/2)}$$

sind die gebräuchlichsten. Diese Funktionen sind umkehrbar, ihre Umkehrfunktionen werden *Arcussinus*, *Arcuscosinus* und *Arcustangens* genannt und mit $\arcsin$, $\arccos$ und $\arctan$ bezeichnet.

15 **Satz** *Die Funktionen*

$$\arcsin\colon\ [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2], \qquad \arccos\colon\ [-1,1] \to [0,\pi]$$

sind auf $[-1,1]$ *stetig, auf* $(-1,1)$ *stetig differenzierbar, und es gilt*

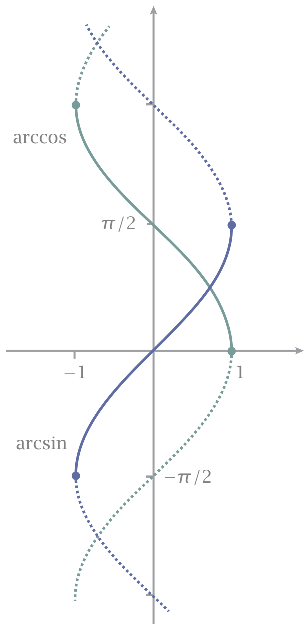
$$\arcsin' t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \arccos' t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Die Funktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$ *ist stetig differenzierbar mit*

$$\arctan' t = \frac{1}{1+t^2}. \qquad \rtimes$$

Abb 7

Hauptzweige des Arcussinus und Arcuscosinus mit Teilen zweier Nebenzweige



⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte arctan. Die Funktion $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ besitzt eine strikt positive Ableitung und ist surjektiv. Sie ist daher umkehrbar, und die Umkehrfunktion arctan ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Für die Ableitung gilt mit $\tau = \arctan t$ und der Umkehrregel

$$\arctan' t = \frac{1}{\tan' \tau} = \frac{1}{1 + \tan^2 \tau} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Analog werden die übrigen Behauptungen bewiesen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Die hier definierten Arcusfunktionen werden als die *Hauptzweige* der jeweiligen Arcusfunktion bezeichnet. Schränkt man sin, cos, tan auf andere geeignete Intervalle ein, so erhält man entsprechende *Nebenzweige* dieser Funktionen. ⊸