9

Spezielle Funktionen

Spezielle Funktionen sind das Salz der Analysis. An erster Stelle stehen dabei die Exponenzialfunktion und die trigonometrischen Funktionen, mit deren Hilfe Wachstums- und Schwingungsvorgänge beschrieben werden. Solche Vorgänge werden, entsprechend ihrer physikalischen Natur, durch *Differenzialgleichungen* modelliert.

Das einfachste und zugleich wichtigste *Wachstumsgesetz* ist

$$\varphi' = \varphi.$$

Bezeichnet φ irgendeine positive Messgröße, so bringt diese Gleichung zum Ausdruck, dass die Veränderungsrate φ' proportional zu φ selbst ist – wobei der Proportionalitätsfaktor hier der Einfachheit halber 1 ist.

Das einfachste *Schwingungsgesetz* wird beschrieben durch die Gleichung

$$\varphi'' = -\varphi.$$

Bezeichnet φ die Auslenkung aus einer gewissen Ruhelage, so bringt sie zum Ausdruck, dass die Rückstellkraft, also im Wesentlichen die Beschleunigung φ'', proportional zur Auslenkung φ wächst und in die entgegengesetzte Richtung weist.

Lösungen des Wachstumsgesetzes werden durch Exponenzialfunktionen, Lösungen des Schwingungsgesetzes durch trigonometrische Funktionen beschrieben. Den allgemeinen Existenzsatz für Lösungen von Differenzialgleichungen benötigen wir hierfür nicht, es reicht die Theorie der Potenzreihen.

9.1

9.1 Exponenzialfunktion

Wir suchen eine Lösung des Wachstumsgesetzes

$$\varphi' = \varphi.$$

Das heißt, wir suchen eine reelle differenzierbare Funktion φ auf einem möglichst großen Intervall I, so dass $\varphi'(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$ gilt.

Eine solche Lösung kann allerdings nicht eindeutig sein. Denn ist φ eine Lösung, so ist auch $\lambda\varphi$ für jedes reelle λ eine Lösung, die für $\lambda \neq 1$ und $\varphi \not\equiv 0$ von φ verschiedenen ist. Eindeutig wird eine solche Lösung erst, wenn man zum Beispiel noch einen festen Wert zu einem festen Zeitpunkt vorgibt. Man spricht dann von einem *Anfangswertproblem*.

1 **Existenz- und Eindeutigkeitssatz** *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi' = \varphi, \qquad \varphi(0) = 1$$

besitzt die eindeutige analytische Lösung

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!},$$

genannt Exponenzialfunktion. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Existiert eine solche Lösung φ auf einem Intervall I um den Nullpunkt, so ist φ dort notwendigerweise unendlich oft differenzierbar, und es gilt $\varphi^{(n)} = \varphi$ für alle $n \geqslant 1$. Insbesondere ist

$$\varphi^{(n)}(0) = 1, \qquad n \geqslant 0.$$

Das Lagrange-Restglied 8.22 verschwindet auf jedem Intervall $[-r, r] \subset I$, denn

$$\|\varphi^{(n)}\|_{[a,b]} \frac{r^n}{n!} = \|\varphi\|_{[a,b]} \frac{r^n}{n!} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Somit ist φ analytisch und wird durch seine Taylorreihe dargestellt, mit

$$\varphi(t) = T_0\varphi(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} = \exp(t).$$

Diese Funktion ist tatsächlich – wie wir bereits wissen – für alle t erklärt und damit die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. ⟩⟩⟩⟩⟩

Genauso beweist man den etwas allgemeineren Fall.

2 **Satz** *Das allgemeine Anfangswertproblem*

$$\varphi' = \varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0$$

besitzt die eindeutige analytische Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \varphi_0 \exp(t). \qquad \rtimes$$

Aus der Reihendarstellung von $\exp$ kann man allerdings kaum auf die wesentlichen Eigenschaften der Exponenzialfunktion schließen. Hierfür benötigen wir die

3 **Funktionalgleichung der Exponenzialfunktion** *Für reelle s, t gilt*

$$\exp(s + t) = \exp(s) \exp(t). \tag{1}$$

Insbesondere ist

$$\exp(t) \exp(-t) = 1 \tag{2}$$

und $\exp(t) > 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Als Funktion nur von t betrachtet erfüllen beide Seiten von (1) die Differenzialgleichung $\varphi' = \varphi$. Zum Beispiel ist

$$(\exp(s) \exp(t))' = \exp(s) \exp(t)' = \exp(s) \exp(t).$$

Außerdem haben sie denselben Wert bei $t = 0$, nämlich $\exp(s)$. Also $_2$ sind sie gleich, es gilt also (1). Die zweite Gleichung folgt hieraus mit $\exp(t) \exp(-t) = \exp(0) = 1$. Das aber bedeutet, dass $\exp$ keine Nullstelle besitzt. Aus Stetigkeitsgründen ist daher $\exp$ überall positiv. ⟩⟩⟩⟩⟩

4 **Satz** *Die Exponenzialfunktion ist streng monoton steigend mit*

$$\lim_{t \to \infty} \exp(t) = \infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} \exp(t) = 0.$$

Insbesondere bildet $\exp$ *die reelle Gerade bijektiv auf* $(0, \infty)$ *ab.* $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund des letzten Satzes ist $\exp'$ überall positiv und damit $\exp$ streng monoton steigend. Aus der Reihendarstellung folgt

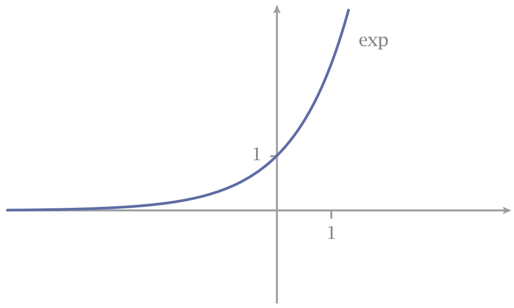
$$\exp(t) \geqslant 1 + t \to \infty, \qquad 0 \leqslant t \to \infty.$$

Wieder mit (2) ist dann

$$\lim_{t \to -\infty} \exp(t) = \lim_{t \to \infty} \exp(-t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\exp(t)} = 0. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Abb 1

Exponenzialfunktion



Die Funktion e^t

Bis jetzt ist noch nicht klar, was die Exponenzialfunktion mit *Exponenziation* und der *Eulerschen Zahl* $_{5.15}$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1)$$

zu tun hat. Das wollen wir jetzt klären.

5 **Lemma** *Für $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\exp(n/m) = e^{n/m} \coloneqq (e^{1/m})^n. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $n \geqslant 0$ ist aufgrund der Funktionalgleichung

$$\exp(n) = \exp(1 + .. + 1) = \exp(1) \cdot\cdot \exp(1) = e^n,$$

wobei die Pünktchen für insgesamt n Summanden respektive Faktoren stehen. Also ist auch

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.$$

Für $m \geqslant 1$ gilt entsprechend $\exp(1/m)^m = \exp(m/m) = e$. Somit ist nach Definition der m-ten Wurzel $_{7.21}$

$$\exp(1/m) = e^{1/m}.$$

Die n-te Potenz beider Seiten ergibt die allgemeine Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Aus Stetigkeitsgründen ist es sinnvoll, diese Identität *per definitionem* auf beliebige reelle Exponenten auszudehnen.

Definition *Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist*

$$e^t \coloneqq \exp(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!}. \qquad \rtimes$$

Damit gilt also $e^{s+t} = e^s e^t$, wie es sich für eine Exponenzialfunktion gehört.

9.2 Logarithmusfunktion

Die Exponenzialfunktion ist streng monoton steigend, und ihre Ableitung verschwindet nirgends. Sie besitzt somit eine Umkehrfunktion, die ebenfalls streng monoton steigt und überall differenzierbar ist. Dies ist die *Logarithmusfunktion.*

6 **Definiton und Satz** *Die Umkehrfunktion der Exponenzialfunktion ist der natürliche Logarithmus*
$\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. *Seine Ableitung ist*

$$\log'(t) = \frac{1}{t},$$

und es gilt die Funktionalgleichung

$$\log(uv) = \log(u) + \log(v), \qquad u, v > 0.$$

Insbesondere gilt $\log(u^n) = n\log(u)$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion ist

$$\log'(t) = \left.\frac{1}{\exp'(s)}\right|_{s=\log(t)} = \frac{1}{\exp(\log(t))} = \frac{1}{t}.$$

Und aufgrund der Funktionalgleichung für $\exp$ ist

$$\begin{aligned}\exp(\log(u) + \log(v)) &= \exp(\log(u))\exp(\log(v)) \\ &= uv \\ &= \exp(\log(uv)).\end{aligned}$$

Also ist $\log(u) + \log(v) = \log(uv)$. Die letzte Behauptung folgt für $n \geqslant 1$ mit Induktion, und dann für $n \leqslant -1$ aus

$$0 = \log(1) = \log(uu^{-1}) = \log(u) + \log(u^{-1}),$$

also $\log(u^{-1}) = -\log(u)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Da $\log'(t) = 1/t$ auf $(0,\infty)$ unendlich oft diffferenzierbar ist, ist es auch der Logarithmus. Tatsächlich ist er sogar reell analytisch.

7 **Satz** *Die Logarithmusfunktion ist reell analytisch auf* $(0,\infty)$ *und besitzt die Potenzreihenentwicklung*

$$\log(1+t) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \mp .., \qquad |t| < 1.$$ ⋊

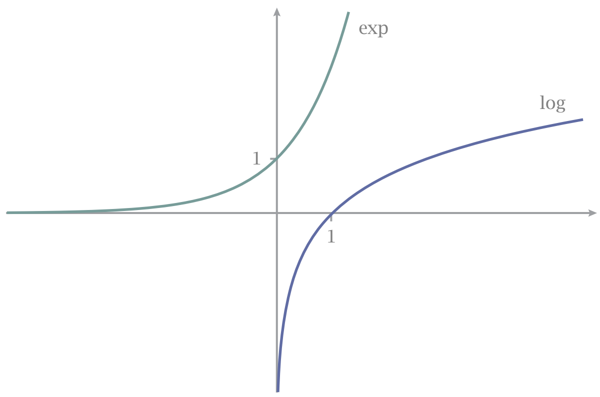


Abb 2

Logarithmus- und Exponenzialfunktion

⟪⟪⟪ Für jedes $a > 0$ gilt aufgrund der Funktionalgleichung

$$\log(a+h) = \log\left(a\left(1+\frac{h}{a}\right)\right) = \log(a) + \log\left(1+\frac{h}{a}\right).$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $\log(1+t)$ um 0 durch seine Taylorreihe dargestellt wird. Dann existiert eine solche Darstellung auch um jeden anderen Punkt $a > 0$.

Sei $\phi(t) = \log(1+t)$. Dann ist $\phi(0) = 0$ und

$$\phi^{(n)}(t) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+t)^n}, \qquad n \geqslant 1,$$

also

$$\frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad n \geqslant 1.$$

Somit hat die Taylorreihe $T_0\phi$ die im Satz angegebene Gestalt. Für das Restglied erhalten wir für $0 \leqslant t \leqslant 1$ die Abschätzung

$$|R_0^{n-1}\phi(t)| \leqslant \|\phi^{(n)}\|_{[0,1]}\frac{t^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Die Tayloreihe stellt also dort die Logarithmusfunktion dar. Für eine entsprechende Abschätzung für $-1 < t < 0$ benötigen wir allerdings die Darstellung des Restglieds in Integralform, welche wir später nachholen ??. ⟫⟫⟫

Bemerkung Es gilt also insbesondere

$$\log 2 = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots \,. \qquad ⊸$$

9.6

- **Allgemeine Potenzen**

  Für $a > 0$ und rationale Exponenten n/m vereinbaren wir

$$a^{n/m} \coloneqq (a^{1/m})^n$$

wie zuvor für die e-Funktion. Mit $a = \mathrm{e}^{\log a}$ folgt hieraus

$$a^{n/m} = \mathrm{e}^{(n/m)\log a}.$$

Daher ist folgende Definition sinnvoll.

Definition und Satz *Für $a > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ ist*

$$a^t \coloneqq \mathrm{e}^{t \log a}.$$

Die Funktion $t \mapsto a^t$ ist stetig differenzierbar mit $(a^t)' = a^t \log a$ und

$$a^{s+t} = a^s a^t, \qquad a^{st} = (a^s)^t, \qquad (ab)^t = a^t b^t$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Alle Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition, zum Beispiel

$$(a^t)' = (\mathrm{e}^{t \log a})' = \mathrm{e}^{t \log a} \log a = a^t \log a. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Betrachten wir nicht t, sondern a als Variable, so haben wir mit a^t zugleich auch für jedes reelle α die Potenz

$$t^\alpha \coloneqq \mathrm{e}^{\alpha \log t}, \qquad t > 0,$$

erklärt. Für diese gilt

$$(t^\alpha)' = (\mathrm{e}^{\alpha \log t})' = \mathrm{e}^{\alpha \log t}\frac{\alpha}{t} = \frac{\alpha t^\alpha}{t} = \alpha t^{\alpha - 1}.$$

Die Differenziationsregel für ganzzahlige Exponenten $_{8.4}$ gilt damit ebenso für beliebige reelle Exponenten.

9.3 Sinus und Cosinus

Die Sinus- und Cosinusfunktion erhalten wir als spezielle Lösungen der *Schwingungsgleichung* $\varphi'' = -\varphi$.

8 **Satz und Definition** *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi'' = -\varphi, \qquad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1,$$

besitzt die eindeutige analytische, Sinusfunktion genannte Lösung

$$\sin : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(t) \coloneqq \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ebenso besitzt das Anfangswertproblem

$$\varphi'' = -\varphi, \qquad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0,$$

die eindeutige analytische, Cosinusfunktion genannte Lösung

$$\cos : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(t) \coloneqq \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte die erste Gleichung. Ist φ zweimal differenzierbar und gilt $\varphi'' = -\varphi$, so ist φ auch beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$\varphi^{(2n+i)} = (-1)^n \varphi^{(i)}, \qquad n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant i \leqslant 1.$$

Aus den Anfangswerten folgt damit

$$\varphi^{(2n)}(0) = 0, \qquad \varphi^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \qquad n \geqslant 0.$$

Das Restglied nach Lagrange verschwindet für $n \to \infty$ wie bei der Exponenzialfunktion. Somit ist φ analytisch und wird durch seine Taylorreihe dargestellt,

$$\varphi(t) = T_0\varphi(t) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(t).$$

Entsprechendes gilt für die Cosinusfunktion. ⟩⟩⟩⟩⟩

9 **Satz** *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi'' = -\varphi, \qquad \varphi(0) = a, \quad \varphi'(0) = b$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$\varphi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = a\cos(t) + b\sin(t). \qquad \rtimes$$

Im Folgenden geht es darum, die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktionen zu bestimmen. Die Potenzreihenentwicklungen sind dabei allerdings wenig hilfreich. So sieht man ihnen nicht im Geringsten an, dass sie periodische Funktionen definieren. Vielmehr stützen wir uns im Folgenden auf die Differenzialgleichung.