20. Vorlesung 27. 1. 2021

$$\boxed{\varphi' = \alpha \varphi}, \quad \alpha \neq 0$$

$\varphi = \varphi(t)$? 0 $\qquad \alpha = 1$:

$$\varphi' = \varphi .$$

Funktion $t \mapsto \varphi(t)$:

$$\varphi'(t) = \varphi(t)$$

Nicht eindeutig: Sei φ eine Lösung. Dann ist auch

$$\tilde{\varphi} = c\varphi, \quad c \in \mathbb{R}$$

Lsg:

$$(\tilde{\varphi})' = (c\varphi)' = c\varphi' = c\varphi = \tilde{\varphi} .$$

Anfangswert: $\varphi(0) = 1$.

Anfangswertproblem:

$$\text{AWP} \quad \begin{cases} \varphi' = \varphi, & t \in \mathbb{R} \\ \varphi(0) = 1. \end{cases}$$

Beweis: Sei φ eine solche Lösung auf Intervall I.

Dann ist φ C^∞, und es gilt:

$$\varphi^{(n)} = \varphi,$$

insbesondere

$$\varphi^{(n)}(0) = 1, \qquad n \geq 0.$$

Also Taylorreihe von φ:

$$T_0\varphi(t) = \sum \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}.$$

Definiere

$$\varphi(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!},$$

dann $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} t^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} = \varphi.$$

Außerdem:

$$\varphi(0) = 1.$$

Bew.: Angenommen, φ ist Lsg auf ein Intervall, dann ist φ C^∞:

$$\varphi^{(n)} = \varphi,$$

und

$$\varphi^{(n)}(0) = 1.$$

Damit

$$T_0\varphi(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{\overbrace{\varphi^{(n)}(0)}^{1}}{n!}\, t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}.$$

Lagrangerestglied: auf $[-r, r]$:

$$\|\underbrace{\varphi^{(n)}}_{\varphi}\|_{[a,b]} \cdot \frac{r^n}{n!} = \|\varphi\|_{[a,b]} \frac{r^n}{n!} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Also:

$$\varphi(t) = T_0\varphi(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}.$$

Dann φ definiert und eine Lsg:

Denn: $\varphi' = \varphi$, $\varphi(0) = 1$.

Funktionalgleichung:

$$\boxed{\exp(s+t) = \exp(s)\cdot\exp(t).}$$

Idee: Betrachte beide Seiten als Funktion von t (s fest)

Beide Seite lösen dasselbe AWP:

$\leftarrow$ t-Abl.

$$\left(\underline{\exp(s)\cdot\exp(t)}\right)'$$

$\varphi' = \varphi$

$$= \exp(s)\cdot(\exp(t))'$$

$$= \underline{\exp(s)\cdot\exp(t)}$$

$\varphi' = \varphi$

$$\exp(s+t)' = \exp(s+t)$$

AWP: $\ldots\Big|_{t=0} = \underline{\underline{\exp(s).}}$

Beide lösen $\varphi' = \varphi$, $\varphi(0) = \exp(s)$.

Eindeutigkeit $\Rightarrow$ Beh. $\boxtimes$

$$\exp(s+t) = \exp(s)\,\exp(t)$$

Setze $s = -t$:

$$\exp(-t)\,\exp(t) = \exp(0) = 1$$

also:

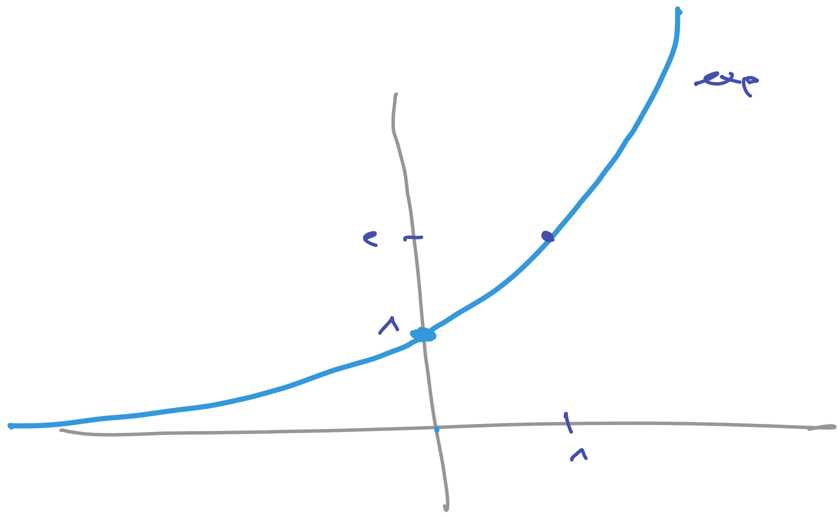
$$\exp(-t) = \frac{1}{\exp(t)}$$

exp hat keine Nullstelle.

Also: $\exp > 0$.

$t \ge 0$: $\displaystyle\sum_{n \ge 0} \frac{t^n}{n!} \nearrow \infty, \quad t \to \infty$

$$\exp(-t) = \frac{1}{\exp(t)} \searrow 0, \quad t \to -\infty$$



$$e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} .$$

$$\exp(t) = e^t ,$$

$$e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = \exp(0) \quad ?$$

relation f : $\exp(f) = e^f$.

Beweis: $n \geq 0$:

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}})$$

$$= \exp(1) \cdot \exp(1) \cdot \dots \cdot \exp(1)$$

$$= \underbrace{e \cdot e \cdot \dots \cdot e}_{n\text{-mal}}$$

$$= e^n. \quad ✓$$

$n < 0$:

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}. \quad ✓$$

$m \geq 1$:

$$\exp\left(\frac{1}{m}\right)^m = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_{m\text{-mal}}\right)$$

$$= \exp(1)$$

$$= e$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{1}{m}\right) = e^{1/m}$$

n, m beliebig:

$$\exp\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(e^{1/m}\right)^n = e^{n/m}.$$

∎

Desired rule

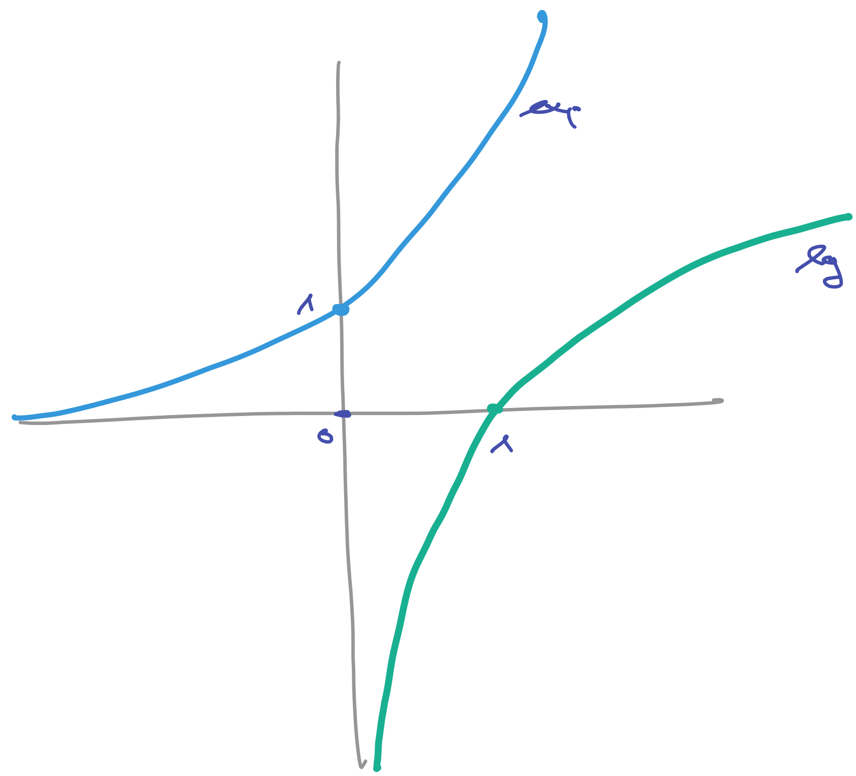
$$e^{s+t} = e^s e^t.$$

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$

bijective

$\exp' = \exp > 0$

$\log = \exp^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$


exp
log
1
0
1

Beweis:

$$\log'(t) = \frac{1}{\exp'(s)}\Big|_{s=\log(t)}$$

$$= \frac{1}{\exp(s)}\Big|_{s=\log(t)}$$

$$= \frac{1}{\exp(\log(t))} = \frac{1}{t}.$$

Funktionalgl.:

$$\exp(\log(u)+\log(v)) = \exp(\log(u))\cdot\exp(\log(v))$$

$$= u\cdot v$$

$$= \exp(\log(u v)).$$

Inverses: $u \geq 1$ ✓ Für $u \leq 1$:

$$0 = \log(1) = \log\left(\frac{u}{u}\right) =$$

$$= \log(u u^{-1})$$

$$= \log(u) + \log(u^{-1})$$

Also:

$$\log(u^{-1}) = -\log(u).$$

(2)

Beweis: $a > 0$:

$$\log(a+h) = \log\left(a \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)\right)$$

$$= \log(a) + \underbrace{\log\left(1+\frac{h}{a}\right)}$$

Betrachte ~~also~~ $a = 1$:

Sei ~~also~~ $f(x) = \log(1+x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

und

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n \geq 1.$$

Betrachte etwa $x = 1$:

Sei etwa $f(t) = \log(1+t)$:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}$$

und

$$f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+t)^n}, \quad n \geq 1.$$

Damit $f(0) = 0$,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

Damit

$$T_0 f = T_0(\log(1+t)) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \mp \dots$$

konvergiert für $|t| < 1$.

Restglied von Lagrange: $0 < t < 1$:

$$|R_0^{n-1} f(t)| \leq \|f^{(n)}\|_{[0,1]} \frac{t^n}{n!}$$

$$\leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \checkmark$$

Bew.: (1)

$$\log(1+t) = \sum (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} \quad , \quad |t|<1$$

$$\Rightarrow \quad \log(1-t) = -\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\log \frac{1}{1-t} = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n} \ .}$$

(2) $t=1$:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots \ .$$

$a > 0$:

$$a^{n/m} := \left(a^{1/m}\right)^n = \left(a^n\right)^{1/m}$$

Sei $a = \exp(\log(a)) = e^{\log a}$:

$$a^{n/m} = \left(\left(e^{\log a}\right)^{1/m}\right)^n$$

$$= \underbrace{e^{\frac{n}{m}\cdot \log a}}$$

Def:

$$a^t := e^{t\cdot \log a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann:

$$(a^t)' = \left(e^{t\cdot \log a}\right)'$$

$$= \underbrace{e^{t\cdot \log a}} \cdot \log a$$

$$= a^t \cdot \log a.$$

$\square$

$$t^{\alpha} := e^{\alpha \cdot \log t}, \qquad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Diffbar in t:

$$\begin{aligned}
(t^{\alpha})' &= \left(e^{\alpha \cdot \log t}\right)' \\
&= \underbrace{e^{\alpha \cdot \log t}} \cdot \frac{\alpha}{t} \\
&= \frac{\alpha t^{\alpha}}{t} \\
&= \alpha t^{\alpha - 1}.
\end{aligned}$$

Also:

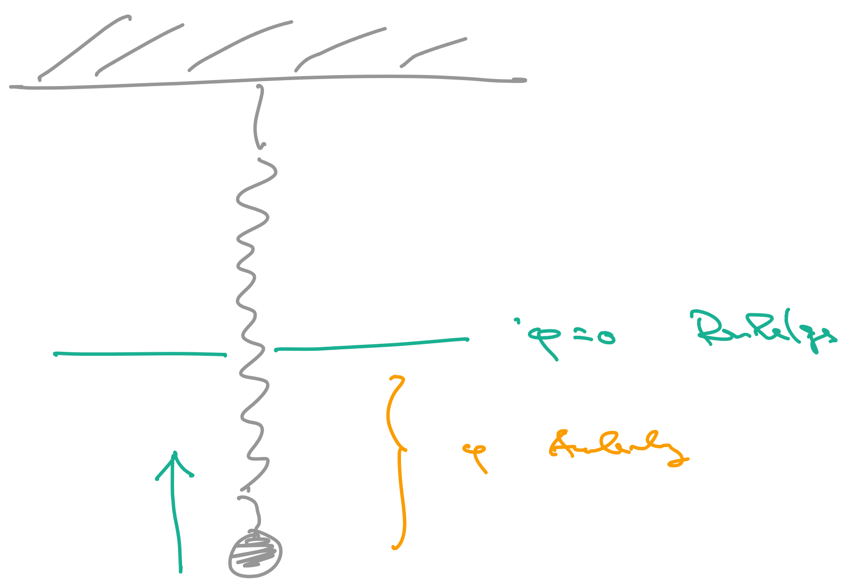
$$(t^{\alpha})' = \alpha \cdot t^{\alpha-1}. \qquad \blacksquare$$

$t > 0$

Schwingungsgleichung

$$\varphi'' = -\varphi$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \,, \quad \varphi'(0) = \varphi_1$$



$$\varphi'' = -\varphi$$

Rückstellkraft

$\varphi'' = -\varphi$: φ ist C^∞

$\varphi^{(2n+i)} = (-1)^n \varphi^{(i)}$, $n \geq 0$, $i = 0, 1$

$\varphi'' = -\varphi$

$\varphi''' = -\varphi'$

$\varphi^{(4)} = \varphi$ ...

Conclusion:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(2n)}(0) &= 0 \\ \varphi^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n \end{aligned}\right\} \text{ gilt } f = \ldots$$

$\underbrace{\varphi'' = -\varphi}_{\text{Lösung}}$, $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0) = b$

$\varphi(t) = a \cos(t) + b \underbrace{\sin(t)}_{0}$

$\varphi(0) = a$

$\varphi'(0) = \left(-a \underbrace{\sin(t)}_{0} + b \cdot \cos t\right)\Big|_{t=0}$

$= b$

Beweis: $\varphi' = \varphi$: $\exp(it)$

$\varphi'' = -\varphi$:

$$(\exp(it))'' = (i \exp(it))' = i^2 \exp(it) = -\exp(it)$$

$\underbrace{\exp(it)}_{\text{komplex.}}$ erfüllen eine Glg.