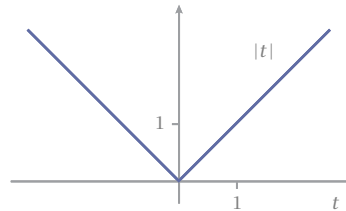


Abb 1

Graph der Betragsfunktion



### ■ Betrag

**Definition** In einem angeordneten Körper  $\mathbb{K}$  ist der *Betrag*  $|a|$  eines Elementes definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \quad \times \end{cases}$$

Der Betrag ist also eine Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad a \mapsto |a|.$$

Für ihn gelten die folgenden Rechenregeln.

7 **Rechenregeln** Für den Betrag  $|\cdot|$  in einem angeordneten Körper gilt:

- (i)  $|a| = |-a| \geq 0$ ,
- (ii)  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ,
- (iii)  $|a| \geq a \geq -|a|$ ,
- (iv)  $|ab| = |a||b|$ ,
- (v)  $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c. \quad \times$

⟨⟨⟨ (i) Für  $a > 0$  ist  $-a < 0$  und somit

$$|a| = a = -(-a) = |-a| > 0.$$

Für  $a < 0$  ist  $-a > 0$  und deshalb

$$|a| = -a = |-a| > 0.$$

Und für  $a = 0$  ist  $|0| = 0 = |-0|$ .

(ii) *Per definitionem* gilt  $|0| = 0$ . Ist andererseits  $a \neq 0$ , so ist auch  $-a \neq 0$ , und damit  $|a| \neq 0$ .

(iii) Für  $a \geq 0$  ist

$$|a| = a \geq 0 \geq -a = -|a|,$$

und für  $a \leq 0$  ist

$$|a| = -a \geq 0 \geq a = -|a|.$$

(iv) Dies zeigt man ebenso mit den entsprechenden Fallunterscheidungen.

(v) Aus  $|a| \leq c$  folgt  $a \leq c$  und  $-a \leq c$ , also auch  $a \geq -c$  und damit

$$-c \leq a \leq c.$$

Umgekehrt folgt aus der letzten Ungleichung  $a \leq c$  und  $-a \leq c$ , also auch  $|a| \leq c$ .  $\ggg$

*Bemerkung* Aussage (v) wird oft angewendet in Form

$$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon. \quad \rightarrow$$

Die Bezeichnung für den folgenden Satz wird sich erst im Kontext der komplexen Zahlen erklären <sub>4.3</sub>. Dort existiert eine ähnliche Betragsfunktion, auch wenn  $\mathbb{C}$  nicht angeordnet ist.

**8 Dreiecksungleichung** *In einem angeordneten Körper gilt*

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|. \quad \times$$

$\llll$  Es ist  $-|a| \leq a \leq |a|$ , und wegen  $|b| = |-b|$  ist auch  $-|b| \leq \pm b \leq |b|$ . Hieraus folgt

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a \pm b \leq |a| + |b|,$$

und mit (ii)

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Hieraus folgt weiter  $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$  und damit

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Vertauschen wir  $a$  und  $b$ , so erhalten wir

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Da einer der beiden linken Seiten gleich  $||a| - |b||$  sein muss, folgt auch die Abschätzung von  $|a \pm b|$  nach unten.  $\gggg$

## 2.3

## Das Vollständigkeitsaxiom

Bisher haben wir über die reellen Zahlen nichts gesagt, was nicht auch für die rationalen Zahlen gilt – sowohl  $\mathbb{Q}$  als auch  $\mathbb{R}$  sind *angeordnete Körper*. Die rationalen Zahlen haben aber den großen Nachteil, dass es von ihnen ›nicht genug gibt‹. So gibt es, wie wir gesehen haben<sup>1,7</sup>, keine Wurzel aus 2. Man sagt auch, sie sind ›nicht vollständig‹.

Die Vollständigkeit eines angeordneten Körpers definieren wir durch die Existenz des Supremums und Infimums nichtleerer beschränkter Teilmengen. Diese Begriffe sind in jeder total geordneten Menge erklärt.

Dazu ist es bequem, die  $<$ -Notation zu erweitern. Für Teilmengen  $A, B$  und Elemente  $c$  einer total geordneten Menge erklären wir

$$A < c \quad :\Leftrightarrow \quad a < c \quad \text{für alle } a \in A,$$

$$A < B \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } b \in B.$$

Entsprechend sind  $A \leq c$  und  $A \leq B$  erklärt.

**Definition** Sei  $M$  eine total geordnete Menge. Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein  $r \in M$  gibt, so dass  $A \leq r$ . Jedes solche  $r \in M$  heißt eine *obere Schranke* von  $A$ .  $\times$

Gibt es unter allen oberen Schranken einer Menge eine kleinste, so nennt man sie das *Supremum* dieser Menge. Die genaue Definition ist folgende.

**Definition** Sei  $M$  eine total geordnete Menge und  $A \subset M$ . Gilt  $A \leq r$ , aber  $A \not\leq \rho$  für jedes  $\rho \in M$  mit  $\rho < r$ , so heißt  $r$  die *kleinste obere Schranke* oder das *Supremum* von  $A$  und wird mit  $\sup A$  bezeichnet.  $\times$

Das Supremum von  $A$  ist also eine obere Schranke von  $A$ , die nicht mehr verbessert werden kann. Für jede obere Schranke  $r$  von  $A$  gilt somit

$$A \leq \sup A \leq r,$$

und für jedes  $\sigma \in M$  mit  $\rho < \sup A$  existiert ein  $a \in A$  mit  $\rho < a$ .

Wenn ein Supremum existiert, so ist es eindeutig<sup>A-17</sup>. Es wird aber nicht verlangt, dass dieses selbst zur Menge gehört.

Analog werden *nach unten beschränkt* und *untere Schranke* von  $A$  definiert. Existiert eine *größte untere Schranke*, so wird sie *Infimum* von  $A$  genannt und mit  $\inf A$  bezeichnet. Für jede untere Schranke  $s$  von  $A$  gilt dann

$$s \leq \inf A \leq A,$$

und für jedes  $\sigma \in M$  mit  $\sigma > \inf A$  existiert ein  $a \in A$  mit  $a < \sigma$ .

- 9 **▶ Beispiele** A. Die leere Menge ist in jeder total geordneten Menge nach oben und unten beschränkt.

B. Jedes abgeschlossene Intervall

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad a \leq b,$$

ist nach oben und unten beschränkt, und es ist

$$a = \inf [a, b], \quad b = \sup [a, b].$$

In diesem Fall gehören Supremum und Infimum ebenfalls zu  $[a, b]$ .

C. Für jedes offene Intervalle

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad a < b,$$

gilt ebenfalls  $a = \inf (a, b)$  und  $b = \sup (a, b)$ . In diesem Fall gehören diese aber nicht zu  $(a, b)$ . ◀

- 10 **Vollständigkeitsaxiom** Ein angeordneter Körper  $\mathbb{K}$  heißt **vollständig**, wenn jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{K}$  ein Supremum besitzt. ✕

Damit haben wir nun alle Axiome versammelt, die wir für die Beschreibung der reellen Zahlen benötigen.

**Charakterisierung der reellen Zahlen** Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen, angeordneten Körper, der mit  $\mathbb{R}$  bezeichnet wird. ✕

In Abschnitt 7 skizzieren wir noch, dass alle vollständigen, angeordneten Körper zueinander *isomorph*, also *gleichgestaltig* sind und somit miteinander identifiziert werden können. Daher ist es gerechtfertigt, von *einem* solchen Körper zu sprechen und ihn mit einem einzigen Symbol,  $\mathbb{R}$ , zu bezeichnen.

## 2.4 Wurzeln

Eine erste Folgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom ist die Existenz einer Wurzel zu jeder positiven reellen Zahl. Die reellen Zahlen leisten also das, was die rationalen Zahlen nicht leisten. Gleichzeitig ergibt sich daraus, dass das Vollständigkeitsaxiom in  $\mathbb{Q}$  nicht gilt.

- 11 **Satz und Definition** Zu jeder reellen Zahl  $a > 0$  existiert genau eine reelle Zahl  $w > 0$  mit  $w^2 = a$ . Diese wird mit  $\sqrt{a}$  bezeichnet und *Quadratwurzel* oder kurz *Wurzel* von  $a$  genannt. Für diese reelle Zahl gilt also

$$w = \sqrt{a} \Leftrightarrow w^2 = a \wedge w > 0. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Für reelle Zahlen  $u > 0$  und  $v > 0$  gilt A-18

$$u < v \Leftrightarrow u^2 < v^2. \quad (1)$$

Zwei verschiedene positive reelle Zahlen können daher nicht Wurzel derselben Zahl  $a > 0$  sein. Dies zeigt die *Eindeutigkeit* der Wurzel.

Um ihre Existenz zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a > 0,$$

denn die Quadrate beider Seiten ergeben  $1/a$ . Die Wurzel von  $1/a$  ergibt sich also aus der Wurzel von  $a$ . Daher können wir uns im Folgenden auf den Fall  $a \geq 1$  beschränken.

Sei also  $a \geq 1$ . Betrachte die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x^2 \leq a\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, denn wegen  $0 \leq 1 = 1^2 \leq a$  gilt  $1 \in A$ . Sie ist auch beschränkt, denn für  $a \geq 1$  ist  $x^2 \leq a \leq a^2$ , mit (1) folglich auch  $x \leq a$ . Somit ist  $A \leq a$ . Also existiert aufgrund des Vollständigkeitsaxioms die reelle Zahl

$$w = \sup A.$$

Zu zeigen ist, dass  $w^2 = a$ .

Dazu betrachten wir die reelle Zahl

$$v = w - \frac{w^2 - a}{w + a}. \quad (2)$$

Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} v^2 &= w^2 - 2w \frac{w^2 - a}{w + a} + \frac{(w^2 - a)^2}{(w + a)^2} \\ &= a + (w^2 - a) - 2w \frac{w^2 - a}{w + a} + \frac{(w^2 - a)^2}{(w + a)^2} \\ &= a + (w^2 - a) \frac{(w + a)^2 - 2w(w + a) + (w^2 - a)}{(w + a)^2} \\ &= a + (w^2 - a)c \end{aligned} \quad (3)$$

mit

$$c = \frac{a^2 - a}{(w + a)^2} \geq 0.$$

Wäre nun  $w^2 - a > 0$ , so folgt mit (2) und (3)

$$v < w, \quad a \leq v^2.$$

Dann wäre  $v$  also eine bessere obere Schranke von  $A$  als dessen Supremum  $w$ , ein Widerspruch. Wäre andererseits  $w^2 - a < 0$ , so folgt

$$w < v, \quad v^2 \leq a.$$

Somit wäre  $v \in A$  und  $w$  keine obere Schranke von  $A$ , ebenfalls ein Widerspruch. Bleibt nur  $w^2 - a = 0$ , also

$$w^2 = a,$$

womit die *Existenz* der Wurzel aus  $a$  gezeigt ist.  $\gggg$

*Bemerkung* Auf exakt dieselbe Weise kann man im angeordneten Körper  $\mathbb{Q}$  für die Menge

$$W = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \wedge r^2 < 2\}$$

argumentieren. Hätte diese Menge ein Supremum *in*  $\mathbb{Q}$ , so wäre dies eine rationale Wurzel von 2. Da es eine solche aber nicht gibt, gilt in  $\mathbb{Q}$  das Vollständigkeitsaxiom *nicht*.  $\rightarrow$

## 2.5 Die erweiterte Zahlengerade

Ist eine nichtleere Teilmenge  $A$  der reellen Zahlen nach oben beschränkt, so existiert deren Supremum als ein Element in  $\mathbb{R}$ . Kommt es auf die genaue Größe dieses Supremums nicht an, so schreibt man dafür auch

$$\sup A < \infty.$$

Ist dagegen  $A$  nach oben unbeschränkt, so schreibt man dafür auch

$$\sup A = \infty.$$

Analoges gilt für  $\inf A > -\infty$  und  $\inf A = -\infty$ .

Auch in vielen anderen Situationen sind die Symbole  $\infty$  und  $-\infty$  nützlich. Um deren Verwendung zu regeln, treffen wir folgende Vereinbarung.

Abb 2 Zum Approximationssatz



**Definition** Unter der *erweiterten Zahlengerade* versteht man die Menge

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

zusammen mit der Vereinbarung, dass  $-\infty < x < \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . ✕

Das Rechnen mit den Symbolen  $\infty$  und  $-\infty$  ist dagegen nur in einigen Fällen sinnvoll erklärbar ?? . Es ist nicht möglich,  $\tilde{\mathbb{R}}$  zu einem Körper zu machen.

Die Definition des Supremums  $\sup A$  einer Menge  $A$  beinhaltet, dass dieses von unten durch Elemente in  $A$  beliebig gut approximiert werden kann. Der folgende Satz formuliert diese Eigenschaft gleichermaßen für beschränkte und unbeschränkte Mengen. Vereinbaren wir außerdem

$$\sup \emptyset := -\infty, \quad \inf \emptyset := \infty,$$

so gilt er sogar für die leere Menge.

- 12 **Approximationssatz** Sei  $A$  eine beliebige Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Dann existiert zu jeder reellen Zahl  $s < \sup A$  ein  $a \in A$  mit

$$s < a \leq \sup A,$$

und zu jeder reellen Zahl  $r > \inf A$  existiert ein  $a \in A$  mit

$$\inf A \leq a < r. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Wir betrachten das Supremum, der Beweis für das Infimum verläuft analog.

Für  $A = \emptyset$  ist nichts zu zeigen, da es keine reelle Zahl  $s < \sup A = -\infty$  gibt. Sei also  $A \neq \emptyset$  und  $s < \sup A$  eine beliebige reelle Zahl. Ist  $\sup A < \infty$ , so muss es aufgrund der Definition des Supremums ein  $a \in A$  mit  $s < a \leq \sup A$  geben. Ist dagegen  $\sup A = \infty$ , so ist  $A$  nach oben unbeschränkt, und es muss erst recht ein  $a \in A$  mit  $s < a$  geben. ⟩⟩⟩

Ist also  $A \subset \mathbb{R}$  eine beliebige Teilmenge, so wird jede reelle Zahl unterhalb von  $\sup A$  durch ein Element in  $A$  übertroffen. Man kann also  $\sup A$  *innerhalb von*  $A$  beliebig gut approximieren – daher der Name *Approximationssatz*. Später werden wir zeigen, dass es sogar *Folgen* von Punkten in  $A$  gibt, die gegen das Supremum *konvergieren*. — Dasselbe gilt entsprechend für das Infimum.