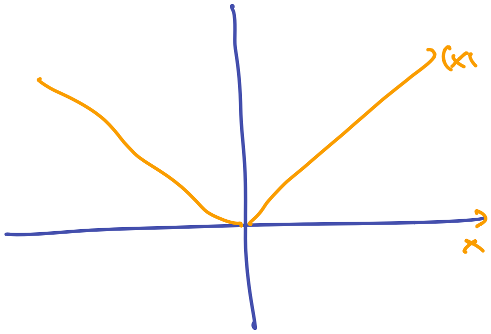
2. Vorlesung 6. 11. 2020

$a \in \mathbb{K}$:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 , \\ -a & \text{für } a < 0 . \end{cases}$$

Damit Funktion :

$$|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$a \longmapsto |a| .$$



Beweis: (i) Für $a > 0$, dann

$-a < 0$,

und

$|a| = a = -(-a) = |-a| > 0$.

Für $a < 0$ ist $\underline{-a > 0}$ und deshalb

$|a| = \underline{-a} = |\underline{-a}| > 0$.

Für $a = 0$: $|0| = 0 = |-0|$. ✓

(ii) Per Def: $|0| = 0$.

Ist andererseits $a \neq 0$, dann ist auch

$$-a \neq 0$$

also $|a| \neq 0$.

(iii) Für $a \geq 0$:

$$|a| = a \geq 0 \geq -\underline{\underline{a}} = -\underline{\underline{|a|}}.$$

Für $a \leq 0$:

$$|a| = -a \leq 0 \leq a = -|a|.$$

$$\left(|a| = -a \right)$$

(v) $|a| \leq c \iff -c \leq a \leq c$.

"$\Rightarrow$" $|a| \leq c$: Dann folgt:

$$\underline{a \leq c}$$

und $\underline{a} \geq -|a| \geq \underline{-c}$

Also:

$$\underline{-c \leq a \leq c}.$$

"$\Leftarrow$" Dann $a \leq c$

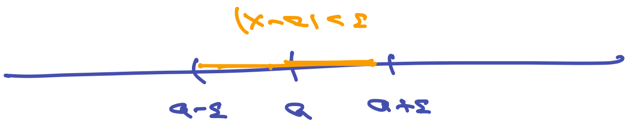
$$\underbrace{-a \leq c}$$

$$|a| \leq c.$$ ☐

Bem: (v)

$$|x-a| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$



Dreiecksungleichung:

$$|a+b| \leq |a| + |b| .$$

Beweis: Es gilt ja

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Also:

$$-|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b|$$

$$= -(|a|+|b|)$$

Fatto (v):

$$|a+b| \le |a| + |b| .$$

$$||a|-|b|| \le |a-b| :$$

Dim.:

$$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|$$

Allora

$$|a| - |b| \le |a-b|$$

Cambiando [illegible] [illegible]

$$-(|a|-|b|) = |b|-|a| \le |b-a|$$

$$= |-(a-b)|$$

$$= |a-b|$$

$$\Downarrow$$

Allora:

$$||a|-|b|| \le |a-b| . \qquad ∎$$

Notation: $A, B \subset M$, $c \in M$:

$A < c \quad :\Longleftrightarrow \quad a < c$ für alle $a \in A$

$A < B \quad :\Longleftrightarrow \quad a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Entsprechend

$A \leq c, \quad A \leq B$.

$A \subset M$ **nach oben beschränkt**: es gibt $r \in M$: $A \leq r$

(es gilt $a \leq r$ für alle $a \in A$).

Jedes solche r heißt obere Schranke.

Für jede obere Schranke r von A gilt damit:

$$A \leq \sup A \leq r$$

① Wenn ein Supremum existiert, dann ist es **eindeutig** ☺

② Es wird nicht verlangt, dass $\sup A$ zu A gehört.

Beispiele: 1.

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},$$

$a \le b$

ist nach oben und nach unten beschränkt; jedes $S \in \mathbb{R}$ mit $S \le a$ ist untere Schranke, und

$$\inf\, [a,b] = a$$

$$\sup\, [a,b] = b.$$

2. Offene Intervalle

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$a < b$

$$\inf\, (a,b) = a$$

$$\sup\, (a,b) = b$$

In diesem Fall sind inf und sup nicht Element von (a,b).

Beweis:

Erinnerung: für $a>0$, $b>0$ gilt:

$$\boxed{a < b \iff a^2 < b^2 .}$$

Genügt: $\boxed{a \geq 1}$.

Denn für $a>0$:

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Sei also $a \geq 1$. Betrachte

$$\boxed{A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x^2 \leq a\}}$$

Ziel: $\sup A = \sqrt{a}$.

1) A nicht leer: $1 \in A$.

2) A ist nach oben beschränkt:

$$x \in A: \quad x^2 \leq a \underset{(a \geq 1)}{\leq} a^2$$

Daraus folgt:

$$x \leq a$$

Also: $A \leq a$.

Vollständigkeitsaxiom : es existiert

$$\omega = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Zu zeigen: $\omega^2 = a$.

Betrachte daher :

$$v = \omega - \frac{\omega^2 - a}{\omega + a}$$

Rechnung:

$$v^2 = \omega^2 - 2\omega \frac{\omega^2 - a}{\underline{\omega + a}} + \frac{(\omega^2 - a)^2}{(\omega + a)^2}$$

$$= a + (\omega^2 - a) - \underline{\qquad} + \underline{\qquad}$$

$$= a + (\omega^2 - a) \cdot \underbrace{\frac{(\omega + a)^2 - 2\omega(\omega + a) + (\omega^2 - a)}{(\omega + a)^2}}$$

$$= a + (\underline{\omega^2 - a}) \cdot \underbrace{\boxed{\frac{a^2 - a}{(\omega + a)^2}}}_{\geq 0} \qquad a^2 \geq a$$

Angenommen : $\omega^2 - a > 0$:

$$\underline{v^2 \geq a} \quad \text{und} \quad \underline{v < \omega}$$

v ist eine Schranke von A

und $v < \omega$.

Also ist ω nicht das Sup. von A. ↯

Annahme: $\omega^2 - a < 0$: Dann

$v^2 = a$, $v > \omega$.

Aber: $v \in A$, aber ω obere Schranke

von A. ↯

Also: $\omega^2 - a = 0$

$\iff \omega^2 = a$. ∎

Bem.: Exakt dieselbe [illegible] in $\mathbb{Q}$.

Symbole $-\infty$ und ∞.

$$\sup A < \infty$$

Ist A nach oben unbeschränkt, dann

$$\sup A = \infty$$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ erweiterte Zahlengerade

Vereinbarung:

$$-\infty < x < \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sup \emptyset := -\infty$$

$$\inf \emptyset := \infty$$

Bewijs : Supremum.

Zij $A = \emptyset$: dan $\sup A = -\infty$ ✓

Zij $A \neq \emptyset$: $p < \sup A$

Geval $\sup A < \infty$, dus A wel dan begrensd

Dan ex. volgens de Definitie van Supremum voor iedere $p < \sup A$ een $a \in A$ zodat $p < a \leq \sup A$.

Geval $\sup A = \infty$: dus A wel dan onbegrensd.

Dan ex. voor iedere $r \in A$ een $a \in A$ zodat $r < a$. ∎