Restgliedformel

Das Taylorpolynom allein sagt wenig aus, solange man nicht weiß, wie gut es die Funktion selbst approximiert. Wir müssen also den Approximationsfehler, das sogenannte *Restglied*

$$R_a^n f(h) = f(a+h) - T_a^n f(h)$$

kontrollieren. Eine erste Abschätzung gibt der folgende Satz.

21 **Satz von Taylor mit Restglied von Lagrange** *Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$. Dann existiert zu jedem $a+h \in I$ ein $\theta \in [0,1]$, so dass*

$$R_a^n f(h) = f(a+h) - T_a^n f(h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}. \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨ Betrachte

$$R(h) = f(a+h) - T_a^n f(h), \qquad S(h) = h^{n+1}.$$

Alle Ableitungen von R und S im Punkt 0 bis zur Ordnung n verschwinden:

$$R^{(k)}(0) = S^{(k)}(0) = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

während $S^{(n+1)} = (n+1)! \neq 0$. Durch n-fache Anwendung des allgemeinen Mittelwertsatzes $_{13}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{R(h)}{S(h)} = \frac{R(h)-R(0)}{S(h)-S(0)} = \frac{R'(\tau_1)}{S'(\tau_1)} &= \frac{R'(\tau_1)-R'(0)}{S'(\tau_1)-S'(0)} \\ &= \frac{R''(\tau_2)}{S''(\tau_2)} = .. = \frac{R^{(n+1)}(\tau_{n+1})}{S^{(n+1)}(\tau_{n+1})} = \frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

Eine Funktion $f \in C^{n+1}(I)$ kann man also lokal durch sein Taylorpolynom vom Grad n so approximieren, dass

$$f(a+h) = T_a^n f(h) + O(h^{n+1}).$$

Hierbei steht der ›O-Ausdruck‹ für eine Funktion ϕ mit der Eigenschaft, dass

$$|\phi(h)| \leqslant M\,|h|^{n+1}$$

für alle kleinen $|h|$ mit einer Konstanten $M \geqslant 0$. Man sagt, ϕ *verschwindet bei Null mit der Ordnung* $n+1$. Diese Information ist für viele Zwecke bereits völlig ausreichend.

▷ *Beispiel* Die Bewegungsgleichung eines Oszillators mit Masse m ist gegeben durch

$$m\ddot{x} = -F(x),$$

wobei x die Auslenkung aus der Ruhelage bei $x = 0$, $\ddot{x}$ ihre zweite Ableitung nach der Zeit, und F die dort wirkende Rückstellkraft bezeichnen. Es gilt also $F(x) \geqslant 0 = F(0)$, und Entwickeln bei 0 ergibt

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + O(x^2) = \omega^2 x + O(x^2)$$

mit einer gewissen Konstanten $\omega^2 > 0$. Für kleine Auslenkungen kann man in erster Näherung den quadratischen Term vernachlässigen und erhält die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator,

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad ◁$$

▷ *Beispiel* Die kinetische Energie eines relativistischen Teilchens mit Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v ist

$$E_{\mathrm{rel}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right),$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Für die Funktion ϕ mit

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-1/2}, \qquad |t| < 1,$$

finden wir

$$\phi(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + O(t^3).$$

Somit erhalten wir mit $u = v^2/c^2$ näherungsweise

$$E_{\mathrm{rel}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 \right) = \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0 \frac{v^4}{c^2}. \quad ◁$$

8.6 Taylorreihe

Ist f beliebig oft differenzierbar, so können wir Taylorpolynome jeder Ordnung bilden. Dies führt zum Begriff der *Taylorreihe*.

8.25

Definition *Für $f \in C^\infty(I)$ und $a \in I$ heißt*

$$T_a f(h) \coloneqq T_a^\infty f(h) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

die Taylorreihe von f am Entwicklungspunkt a. ⋊

Die Taylorreihe $T_a f$ konvergiert immer im Entwicklungspunkt a selbst und hat dort den Wert $f(a)$. Das ist trivial. Eine ganz andere Frage ist, ob sie auch in anderen Punkten konvergiert, und ob ihr Wert dort mit der Funktion selbst übereinstimmt.

Definition *Konvergiert die Taylorreihe von f in einer Umgebung von a gegen f, so heißt f um a entwickelbar in seine Taylorreihe.* ⋊

In diesem Fall gilt also

$$0 = \lim_{n\to\infty} (f(a+h) - T_a^n f(h)) = \lim_{n\to\infty} R_a^n f(h).$$

Somit erhalten wir sofort folgendes

22 **Entwicklungskriterium** *Es gilt $f(a+h) = T_a f(h)$ genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} R_a^n f(h) = 0. \quad ⋊$$

Dies muss man nun für die jeweilige Funktion nachprüfen, so wie man auch die Konvergenz einer Reihe in jedem Fall einzeln prüfen muss. Ein Allzweckkriterium gibt es nicht. Am einfachsten ist noch folgende Situation, welche wir auch im nächsten Kapitel antreffen werden.

23 **Satz** *Sei $f \in C^\infty(I)$. Gilt*

$$\sup_{n\geqslant 0} \sqrt[n]{\|f^{(n)}\|_I} < \infty,$$

so wird f durch seine Taylorreihe in jedem Punkt von I dargestellt. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $a \in I$ und $r > 0$. Auf dem Intervall $I_r = U_r(a) \cap I$ gilt für das Restglied von Lagrange 21 dann

$$\|R_a^{n-1} f\|_{I_r} \leqslant \|f^{(n)}\|_I \frac{r^n}{n!}, \qquad n \geqslant 1.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert dies gegen Null 5.12. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Binomische Reihe

Als Beispiel betrachten wir die binomische Formel für beliebige reelle Exponenten. Wir greifen dabei der Definition von t^α für reelle α 9.2 und der verallgemeinerten Ableitungsregel $(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$ vor.

24 **Binomische Reihe für reelle Exponenten** *Für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{k\geqslant 1} B_k^\alpha t^k, \qquad |t| < 1,$$

mit den allgemeinen Binomialkoeffizienten

$$B_k^\alpha := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\cdot(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdot k}, \qquad k \geqslant 1. \quad \rtimes$$

Man beachte, dass die Identität nur für $|t| < 1$ gilt, während die Funktion selbst für alle $t > -1$ erklärt ist.

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Funktion $f\colon t \mapsto (1+t)^\alpha$ ist auf $(-1,\infty)$ unendlich oft differenzierbar mit

$$f^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1)\cdot\cdot(\alpha-k+1)\,(1+t)^{\alpha-n}.$$

Also ist

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdot(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdot k} = B_k^\alpha.$$

Für das Restglied erhalten wir die Abschätzung

$$|R_0^{n-1} f(t)| = |B_n^\alpha|\,\frac{|t|^n}{|1+s_n|^{n-\alpha}}$$

mit s_n zwischen t und 0. Dies konvergiert gegen Null für $-1/2 < t < 1$. Für $-1 < t \leqslant -1/2$ benötigen wir allerdings eine bessere Restgliedabschätzung durch ein Integral ??. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A. Für $\alpha = 0$ verschwinden alle Binomialkoeffizienten, und die Gleichung reduziert sich auf $(1+t)^0 = 1$, was ja stimmt.

B. Für natürliche Exponenten $\alpha = n \geqslant 1$ gilt $B_k^n = 0$ für $k > n$, und wir erhalten wieder die klassische binomische Formel 3.34.

C. Für $\alpha = -1$ ist $B_k^\alpha = (-1)^k$ und somit

$$\frac{1}{1+t} = 1 + \sum_{k\geqslant 1} (-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 \pm \cdot\cdot, \qquad |t| < 1.$$

Also gilt auch

$$\frac{1}{1-t} = 1 + \sum_{k\geqslant 1} t^k = 1 + t + t^2 + \cdot\cdot\;, \qquad |t| < 1,$$

wie es sich für die geometrische Reihe auch gehört.

D. Für $\alpha = 1/2$ erhalten wir

$$\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{k\geqslant 1} b_k t^k = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 \pm \cdot\cdot$$

mit

$$b_k = \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Funktionen in $C^\infty(I)$, die sich in jedem Punkt in ihre Taylorreihe entwickeln lassen, heißen *reell analytisch*. Ihre Klasse wird mit $C^\omega(I)$ bezeichnet. Diese Funktionen können also lokal immer durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Dies gilt aber nicht für jede Funktion in $C^\infty(I)$! Selbst wenn die Taylorreihe einer Funktion in einer Umgebung des Entwicklungspunktes konvergiert, so bedeutet dies keineswegs, dass sie auch die Funktion darstellt. Das klassische Beispiel hierfür geben wir in Abschnitt 10.3.

Noch einmal Potenzreihen

Offen ist noch die Frage, ob die Summenfunktion einer Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzbereichs eine analytische Funktion darstellt. Dies ist tatsächlich der Fall. Die Grundlage dafür bildet der folgende Satz.

25 **Satz** *Jede Potenzreihe*

$$\phi(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$$

definiert im Innern ihres Konvergenzintervalls eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung man durch gliedweises Differenzieren erhält:

$$\phi'(t) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n t^{n-1}.$$

Diese Reihe hat denselben Konvergenzradius wie ϕ.

⟨⟨⟨⟨ Wie im Fall der Potenzreihe selbst 6.18 zeigt man, dass die ϕ'-Reihe für $|t| < |t_0|$ konvergiert, wenn die ϕ-Reihe im Punkt t_0 konvergiert, und umgekehrt. Daher haben beide Reihen denselben Konvergenzradius A-36.

Für den Differenzenquotienten erhalten wir mit dem Mittelwertsatz 11

$$\frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t+h)^n - t^n}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s_n^{n-1}$$

mit Punkten $(s_n)_{n \geqslant 1}$ zwischen t und $t+h$. Mit

$$\psi(t) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n t^{n-1}$$

erhalten wir also

$$\left|\frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h}-\psi(t)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} na_n(s_n^{n-1}-t^{n-1})\right|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\,|s_n^{n-1}-t^{n-1}|\,.$$

Fur t und $t+h$ in einem abgeschlossenen Konvergenzintervall wird die zweite Summe beliebig klein, indem man N groß genug wählt. Anschließend wird die erste Summe beliebig klein, indem man h klein genug wählt. Daher gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} = \psi(t).$$

Also ist ϕ im Punkt t differenzierbar, und es ist $\phi'(t)=\psi(t)$. ⟫⟫⟫

Da der Konvergenzradius einer Reihe unter Differenziation derselbe bleibt, können wir diesen Vorgang beliebig oft wiederholen.

26 **Potenzreihensatz** *Eine Potenzreihe*

$$\phi(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$$

mit positivem Konvergenzradius definiert im Innern ihres Konvergenzintervalles I eine analytische Funktion ϕ, deren Taylorreihe im Punkt a die Potenzreihe selbst ist:

$$T_a\phi = \phi. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Aus dem vorangehenden Satz folgt durch Induktion, dass eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzintervalls beliebig oft differenzierbar ist, mit

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{n\geqslant k}\frac{n!}{(n-k)!}a_n t^{n-k}, \qquad k\geqslant 0.$$

Also ist $\phi^{(k)}(a)=k!\,a_k$ für alle $k\geqslant 0$ und damit

$$T_a\phi(t) = \sum_{k\geqslant 0} a_k t^k = \phi(t). \qquad ⟫⟫⟫$$

Im nächsten Kapitel werden wir mithilfe von Potenzreihen einige der wichtigsten Funktionen der Analysis definieren.