19. Vorlesung

22. 1. 2021

$$f(a+h) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k h^k \qquad ?$$

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \qquad !$$

Beispiele:

1. $f(t) = \sqrt{1+t}$, $a = 0$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}} , \quad f''(t) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+t)^{3/2}}$$

$$T_0^2 f(t) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{t^2}{4} .$$

2. $p(t) = (1+t)^n \quad , \quad a = 0$

$$\frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k}.$$

Also:

$$\underline{T_0^n\, p(t)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k}$$

$$= (1+t)^n = p(t).$$

Bem: Falls $a \neq 0$, dann andere Koeffizienten.

3. Bsp: Behauptg. :

$$T_a^2 f(x) = f(a) + f'(a) + \frac{1}{2} f''(a) h^2$$

a kritischer Punkt : $f'(a) = 0$:

$$T_a^2 f(x) = f(a) + \frac{1}{2} \underbrace{f''(a) x^2}$$

> 0 : ~~[illegible]~~ rel. Minim

< 0 : ~~[illegible]~~ rel. Max.

$$R_a^n f(x) = f(a+x) - T_a^n f(x) \quad ?$$

Preuve :

$$R_x^n f(h) = \underbrace{f(x+h) - T_x^n f(h)}_{R(h)} = \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} \underbrace{h^{n+1}}_{S(h)}$$

Donc :

$$R^{(k)}(0) = 0, \qquad 0 \leq k \leq n$$

$$S^{(k)}(0) = 0, \qquad \text{—''—}$$

$$S^{(n+1)}(0) = (n+1)! \neq 0.$$

Ensuite :

$$\frac{R(h)}{S(h)} = \frac{R(h) - R(0)}{S(h) - S(0)}$$

$$\underset{\text{a. Fccs}}{=} \frac{R'(\tau_1)}{S'(\tau_1)} = \frac{R'(\tau_1) - R'(0)}{S'(\tau_1) - S'(0)}$$

$$\underset{\text{a. Fccs}}{=} \frac{R''(\tau_2)}{S''(\tau_2)}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{R^{(n+1)}(\tau_{n+1})}{S^{(n+1)}(\tau_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} \qquad \blacksquare$$

Also :

$$f(a+h) = T_a^n f(h) + \underbrace{O(h^{n+1})}_{\varphi(h)}$$

$$|\varphi(h)| \leq C \cdot |h|^{n+1} .$$

<u>Beispiel</u> :

$$m\ddot{x} = -F(x)$$

$x=0$ Ruhelage : $F(0) = 0 .$

Oszillation : $F'(0) > 0$

$$F'(0) = \omega^2 > 0 .$$

Damit :

$$m\ddot{x} = F(0) + F'(0)x + O(x^2)$$

$$= -\omega^2 x + \underbrace{O(x^2)}_{\text{klein für } |x| \text{ klein}}$$

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Harmonischer Oszillator.

$$T_a^n f(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

$n \to \infty$

formal $\quad T_a^\infty f(h) = T_a f(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \cdots$

Entwickeln um a!

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left(f(a+h) - T_a^n f(h) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underline{R_a^n f(h)}.$$

$$\|f^{(n)}\|_I := \sup_{t\in I} |f^{(n)}(t)|$$

$$\sup_{n\geq 0} \sqrt[n]{\|f^{(n)}\|_I} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\|f^{(n)}\|_I \leq K^n}$$

Dem: $a \in I$, $r > 0$:

$$U_r(a) \cap I =: I_r$$

$$a+h \in I_r, \quad \forall\, |h| < r:$$

$$\|R_a^{(n)} f\|_{I_r} \leq \frac{1}{n!} \|f^{(n)}\|_{I_r} \cdot r^n$$

$$\leq \frac{K^n r^n}{n!} \longrightarrow 0.$$

t^α , $\alpha \in \mathbb{R}$

auf $(0, \infty)$ diffbar, wie

$$(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha - 1}.$$

Also auf $(0, \infty)$ C^∞.

Beispiel : $(1+t)^\alpha$, $t > -1$

$$\underbrace{(1+t)^\alpha}_{t > -1} = \underbrace{1 + \sum_{k \geq 1} \binom{\alpha}{k} t^k}_{|t| < 1} .$$

Bsp.:

$f : x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ ist C^{∞} für $x > -1$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\underbrace{(1+x)^{\alpha-k}}_{1 \text{ für } x=0}.$$

Also:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

Restglied:

$$|R_0^{n+1} f(x)| = \left|\binom{\alpha}{n}\right| \cdot \frac{|x|^n}{|1+\xi_n|^{n-\alpha}}$$

mit ξ_n zwischen 0 und x.

$$\longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{für } -1 < x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

mit Restglied mit Cauchy

Beispiel :

1. $\alpha = 0$: $$(1+t)^\alpha = (1+t)^0 = 1$$

$$B_k^\alpha = 0 \, , \quad k \ge 1 .$$

$$1 + \sum \dots = 1 .$$

2. $\alpha = n \ge 1$: $= 0$, $k > n$

$$B_k^n = \frac{n \cdot (n-1) \, \dots \, (n-k+1)}{1 \dots k} = 0$$

für $k > n$

$$(1+t)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} B_k^n t^k$$

Binomische Formel.

3. $\alpha = -1$: $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$

$$B_k^{-1} = (-1)^k$$

Also,

$$\frac{1}{1+t} = 1 + \sum_{k\geq 1} (-1)^k t^k$$

$$= 1 - t + t^2 - t^3 \pm \dots$$

$$= 1 + \sum_{k\geq 1} (-t)^k$$

$t \longrightarrow -t$:

$$\underbrace{\frac{1}{1-t} = 1 + \sum_{k\geq 1} t^k}_{\text{geometrische Reihe}} , \quad |t| < 1$$

.

4. $\alpha = \frac{1}{2}$: $f(t) = \sqrt{1+t}$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{k \geq 1} a_k t^k$$

$$= 1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} t^2 + \frac{1}{16} t^3 - \frac{5}{128} t^4 \pm \dots$$

mit

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots (2k-3)}{1 \cdot 2 \cdots k} .$$

$$\phi(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

$$\phi(t)' = \Big(\sum_{n \geq 0} a_n t^n\Big)'$$

$$= \sum_{n \geq 0} (a_n t^n)'$$

$$= \sum_{n \geq 0} n a_n t^{n-1}$$

$$= \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1} .$$

Bem.: Konvergiert

$$\phi(t) = \sum a_n t^n \quad \text{bei } t_0 \neq 0,$$

so konvergiert

$$\boxed{\psi(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}} \quad \text{für } |t| < |t_0|.$$

Daraus folgt:

ϕ und ψ haben denselben Konvergenzradius.

$$\frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} = \sum_{n\geq 0} a_n \underbrace{\frac{(t+h)^n - t^n}{h}}$$

$$\underset{\text{MWS}}{=} \sum_{n\geq 0} a_n \cdot n \cdot s_n^{n-1}$$

mit Punkt s_n zwischen t und $t+h$.

$$\boxed{\left| \frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} - \psi(t) \right|} \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \to 0$$

$$= \left| \sum_{n\geq 1} n a_n \left(s_n^{n-1} - t^{n-1}\right) \right|$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} n |a_n| \left| s_n^{n-1} - t^{n-1} \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \cdots + \sum_{n>N} \cdots$$

Betrachte $t, t+h \in (-r, r)$.

Sei $\varepsilon > 0$: Wähle N so groß, dass: $\underbrace{\qquad}_{<\varepsilon}$

Wähle dann $|h|$ so klein, dass $\underbrace{\qquad}_{<\varepsilon}$

Also:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = g(t)$$

Also:

$$f'(t) = g(t) = \sum_{n\ge 1} n a_n t^{n-1}.$$

<u>Folgerung:</u> $f(t) = \sum_{n\ge 0} a_n t^n$.

Für Konvergenzradius $r>0$:

Dann f ist ∞ oft differenzierbar.

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n\ge k} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!}}_{= n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)} a_n t^{n-k}, \quad k\ge 0$$

Also:

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k .$$

Also:

$$T_0 f(t) = \sum_{k\ge 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum a_k t^k = f(t). \quad \blacksquare$$