8.3 Höhere Ableitungen

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die Ableitung $f'\colon I \to \mathbb{R}$ wieder eine reelle Funktion auf I. Somit kann man fragen, ob f' ebenfalls differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so erhält man die *zweite Ableitung* von f,

$$f'' \coloneqq (f')'\colon\ I \to \mathbb{R}.$$

So kann man fortfahren, so lange die nächste Ableitung ebenfalls differenzierbar ist, und induktiv die höheren Ableitungen von f erklären. Bezeichnen wir die r-te Ableitung mit $f^{(r)}$, so gilt mit $f^{(0)} \coloneqq f$ also

$$f^{(r)} \coloneqq (f^{(r-1)})', \qquad r \geqslant 1.$$

Insbesondere ist $f^{(1)} = f'$ und $f^{(2)} = f''$. Andere übliche Bezeichnungen hierfür sind $D^r f$ oder auch $\partial^r f$.

Man sagt, f ist *r-mal differenzierbar*, wenn $f, f', .., f^{(r)}$ existieren. Ist außerdem $f^{(r)}$ stetig, so heißt f *r-mal stetig differenzierbar*. Die Klasse dieser Funktionen wird mit $C^r(I)$ bezeichnet, und man sagt, eine Funktion $f \in C^r(I)$ ist eine *C^r-Funktion* oder kurz: *ist C^r*.

Schließlich definiert man noch den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf I,

$$C^\infty(I) \coloneqq \bigcap_{r \geqslant 0} C^r(I).$$

Man erhält somit eine *Skala* von Funktionenräumen

$$C^\infty(I) \subsetneq \,..\, \subsetneq C^{r+1}(I) \subsetneq C^r(I) \subsetneq \,..\, \subsetneq C^1(I) \subsetneq C^0(I).$$

Jede Inklusion ist eine echte Inklusion, denn natürlich gibt es für jedes $r \geqslant 0$ C^r-Funktionen, die nicht C^{r+1} sind.

16 ⊳ A. Jede Potenz $t \mapsto t^n$ mit $n \geqslant 0$ ist unendlich oft differenzierbar, wobei

$$(t^n)^{(r)} = n(n-1) \cdot\cdot (n-r+1)\, t^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} t^{n-r}, \qquad 0 \leqslant r \leqslant n,$$

Insbesondere ist

$$(t^n)^{(n)} \equiv n!$$

und $(t^n)^{(r)} \equiv 0$ für alle $r > n$.

B. Jedes Polynom ist unendlich oft differenzierbar. Ist das Polynom p vom Grad n, so ist $p^{(n+1)} \equiv 0$.

8.16

c. Die im nächsten Kapitel definierten Funktionen exp, sin und cos sind auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Für diese gilt

$$\exp^{(r)} = \exp, \qquad r \geqslant 1,$$

sowie

$$\sin^{(2r+1)} = (-1)^r \cos, \qquad \sin^{(2r)} = (-1)^r \sin .$$

Jede Linearkombination von C^r-Funktionen ist wieder eine C^r-Funktion, wie man induktiv mit $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ leicht zeigt. Somit ist $C^r(I)$ ein reeller Vektorraum. Es gilt aber noch mehr.

17 **Leibnizsche Formel** *Das Produkt zweier Funktionen $f, g \in C^r(I)$ gehört ebenfalls zu $C^r(I)$, und es gilt*

$$(fg)^{(r)} = \sum_{s=0}^{r} B_s^r f^{(r-s)} g^{(s)}$$

mit den Binomialkoeffizienten $B_s^r = \dfrac{r!}{s!\,(r-s)!} = \dbinom{r}{s}$. ⋊

Den Beweis erfolgt per Induktion wie bei der binomischen Formel A-37. Auch bei der Komposition und der Umkehrung von Funktionen gibt es keine Überraschungen, auch hier überlassen wir die Beweise als Aufgabe A-38.

18 **Satz** *Sei $f \in C^r(I)$ mit $r \geqslant 1$.*
(i) *Ist $g \in C^r(J)$ sowie $f(I) \subset J$, so ist $g \circ f$ ebenfalls C^r.*
(ii) *Verschwindet f' nirgends, so ist f umkehrbar und f^{-1} ebenfalls C^r.* ⋊

▹ *Beispiel* Differenziert man die erste Ableitung von $\phi = f^{-1}$,

$$\phi' = \frac{1}{f' \circ \phi},$$

so erhält man als zweite Ableitung

$$\phi'' = -\frac{1}{(f' \circ \phi)^2} \cdot f'' \circ \phi \cdot \phi' = -\frac{f'' \circ \phi}{(f' \circ \phi)^3} = -\left(\frac{f''}{f'^3}\right) \circ \phi.$$

8.4 Die Regel von l'Hospital

Oft sind sogenannte ›unbestimmte Ausdrücke‹ der Form $0/0$ zu bestimmen, also Grenzwerte wie

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}, \qquad \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t^2},$$

wo Zähler und Nenner gleichzeitig gegen Null konvergieren. Für diesen Fall gibt es eine nützliche Regel, die auf dem verallgemeinerten Mittelwertsatz basiert.

19 **Einfache Regel von l'Hospital** *Seien $f, g \in C^1(I)$. Ist in einem Punkt $a \in I$*

$$f(a) = g(a) = 0$$

und $g' \neq 0$ in einer punktierten Umgebung von a, so gilt

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Insbesondere existiert der linke Grenzwert, wenn der rechte Grenzwert existiert. ⋊

⟪⟪ Aufgrund des allgemeinen Mittelwertsatzes 13 ist

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}$$

mit einem s zwischen a und t. Mit $t \to a$ haben wir auch $s \to a$. Existert also der Grenzwert auf der rechten Seite für $s \to a$, so folgt

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{s \to a} \frac{f'(s)}{g'(s)}. \qquad ⟫⟫$$

▷ *Beispiele* A. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{2x + 1} = \frac{2}{3},$

B. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t}{1} = 1.$

C. $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{f'(t)}{1} = f'(a).$ ◁

▷ *Achtung* Man darf nicht vergessen zu überprüfen, ob tatsächlich alle Voraussetzungen der Regel erfüllt sind. So ist zum Beispiel

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2}{\cos t} \quad \neq \quad -\lim_{t \to 0} \frac{2t}{\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{2}{-\cos t} = -2. \qquad ◁$$

Ist auch $f'(a) = g'(a) = 0$, so kann man den Satz nochmals anwenden. Erfüllen die Ableitungen von f' und g' die entsprechenden Voraussetzungen, so geht man zu den zweiten Ableitungen über.

A. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x-2}{6x} = \dfrac{2}{3}.$

B. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos^2 t}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t \cos t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1} = 1\,.$

C. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} = f''(a).$

Der allgemeine Fall

Oft handelt es sich bei a um einen Randpunkt eines Definitionsintervalls, in dem f' und g' nicht definiert sind. Auch ist der Fall eines uneigentlichen Randpunktes bei ∞ oder $-\infty$ von Interesse, sowie unbestimmte Ausdrücke der Form ∞/∞. Auf alle diese Fälle lässt sich die Regel von l'Hospital verallgemeinern. Der Beweis ist etwas technisch und kann beim ersten Lesen übergangen werden.

20 **Regel von l'Hospital** *Es seien $f, g \in C^1(I)$. Ist a ein Randpunkt von I mit*

$$\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{t\to a} g(t) = 0 \qquad \textit{oder} \qquad \lim_{t\to a} g(t) = \pm\infty,$$

und ist $g' \neq 0$ in einer punktierten Umgebung von a, so gilt

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}, \tag{5}$$

falls der zweite Grenzwert auf der erweiterten Zahlengerade existiert.

Sei

$$\lambda = \lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}. \tag{6}$$

Wir zeigen, dass im Fall $\lambda < \infty$ zu jedem $\lambda^+ > \lambda$ ein Intervall $I_\delta = \dot{U}_\delta(a) \cap I$ existiert, so dass

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant \lambda^+, \qquad t \in I_\delta. \tag{7}$$

Analog zeigt man im Fall $\lambda > -\infty$, dass zu jedem $\lambda^- < \lambda$ ein ähnliches Intervall J_δ existiert, so dass

$$\frac{f(t)}{g(t)} \geqslant \lambda^-, \qquad t \in J_\delta.$$

Beides zusammen ergibt die Behauptung (5).

Sei also $\lambda < \lambda^+ < \infty$. Da der Grenzwert in Gleichung (6) existiert, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein Intervall $I_\delta = \dot{U}_\delta(a) \cap I$ so, dass

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \leqslant \lambda^+ - \varepsilon, \qquad t \in I_\delta.$$

Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt hieraus

$$\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} \leqslant \lambda^+ - \varepsilon, \qquad s,t \in I_\delta, \tag{8}$$

mit einem von s und t abhängenden $u \in I_\delta$.

Gilt jetzt

$$\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{t\to a} g(t) = 0,$$

so folgt mit $s \to a$ hieraus (7), und wir sind fertig.

Gilt dagegen beispielsweise $\lim_{t\to a} g(t) = \infty$, so schreiben wir zuerst

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}\,\frac{g(t)-g(s)}{g(t)} + \frac{f(s)}{g(t)}.$$

Für irgendein festes $s \in I_\delta$ und t hinreichend nahe bei a ist $g(t) - g(s) > 0$, so dass mit (8)

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant (\lambda^+ - \varepsilon)\,\frac{g(t)-g(s)}{g(t)} + \frac{f(s)}{g(t)}, \qquad t \in I_\theta,$$

auf einem hinreichend kleinen Intervall $I_\theta \subset I_\delta$. Für $t \to a$ konvergiert die rechte Seite gegen $\lambda^+ - \varepsilon$. Wählen wir also I_θ nochmal kleiner, so gilt auch

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant \lambda^+, \qquad t \in I_\theta,$$

und damit wieder (7). Der Fall $\lim_{t\to a} g(t) = -\infty$ geht genauso. ⟫⟫⟫

Bemerkung Der Beweis gilt für den Fall $t \to a$ und $t \to \pm\infty$ als auch für den Fall, dass es sich in (5) um einen uneigentlichen Grenzwert handelt. ⊸

▷ a. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^t} = 0.$

b. Ganz allgemein gilt $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^m \mathrm{e}^{-t} = 0$ für $m \geqslant 0$.

c. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1/t}{1} = 0.$ ◁

▷ Andere unbestimmte Ausdrücke wie $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ lassen sich oft in eine Form bringen, auf die die Regel von l'Hospital angewendet werden kann:

a. $\displaystyle\lim_{t\to 0} (t \log t) = \lim_{t\to 0} \frac{\log t}{1/t} = -\lim_{t\to 0} \frac{1/t}{1/t^2} = -\lim_{t\to 0} t = 0.$

b. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{\log(1+s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1/(1+s)}{1} = 1.$

c. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$ ◁

8.20

8.5 Taylorpolynome

Sei f eine reelle Funktion auf einem Intervall I und $a \in I$. Die *Stetigkeit* von f im Punkt a können wir auffassen als lokale Approximierbarkeit von f durch eine *konstante* Funktion, denn es gilt

$$f(a+h) = f(a) + \varepsilon(h)$$

mit einer in 0 stetigen und dort verschwindenden Funktion ε. Die *Differenzierbarkeit* von f in a ist gleichbedeutend mit der lokalen Approximierbarkeit durch eine *lineare* Funktion, denn

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h$$

wiederum mit einer in 0 stetigen und dort verschwindenden Funktion ε_1. Man kann daher fragen, ob sich eine Funktion lokal auch durch *Polynome höherer Ordnung* so approximieren lässt, dass

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{l=1}^{n} a_l h^l + \varepsilon(h)h^n$$

mit einer im Punkt 0 stetigen und dort verschwindenden Funktion ε.

Ist ε hinreichend oft differenzierbar, so sind die Koeffizienten a_k eindeutig bestimmt. Denn dann gilt [17]

$$\partial^k(\varepsilon(h)h^n)\Big|_{h=0} = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Somit ist

$$f^{(k)}(a) = \sum_{l=1}^{n} a_l\, \partial^k h^l\Big|_{h=0} = k!\,a_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Dies nehmen wir zum Anlass für folgende Definition.

Definition *Für $f \in C^n(I)$ und $a \in I$ heißt*

$$T_a^n f(h) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

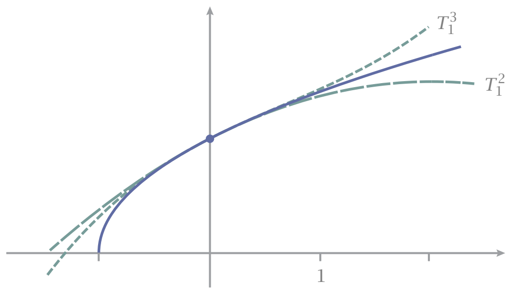
das n-te Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt a. ⋊

Insbesondere ist

$$T_a^0 f(h) = f(a),$$
$$T_a^1 f(h) = f(a) + f'(a)h$$
$$T_a^2 f(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2.$$

Abb 9

Taylorpolynome zu $\sqrt{1+t}$ im Punkt 1



▹▸ *Beispiele* A. Für $f\colon t \mapsto \sqrt{1+t}$ und $a = 0$ ist

$$T_0^2 f(t) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}.$$

B. Für das Polynom $p\colon t \mapsto (1+t)^n$ gilt

$$\frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n \cdot\cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Also ist

$$T_0^n p(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n = p(t)$$

aufgrund der binomischen Formel $_{3.34}$. Entwickeln wir dagegen p an einer anderen Stelle $a \neq 0$, so erhalten wir ein Polynom n-ter Ordnung mit anderen Koeffizienten. ◂◃