18. Vorlesung 20. 1. 2021

Bem.: f' ist auf I stetig, und

$f'(t) \neq 0$, $t \in I$.

Also $f' \gtrless 0$ auf I.

Also: f streng monoton.

Also ist f umkehrbar:

$$g = f^{-1} : J \to I, \qquad J = f(I)$$

und g ist diffbar:

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))}, \qquad t \in J.$$

Kont.:

$$g' = \frac{1}{\underbrace{\underbrace{f'}_{\text{stetig} \neq 0} \circ\, g}_{\text{stetig} \neq 0}} \quad \Big\} \text{ stetig auf } J.$$

Also: $g \in C^1(J)$.

$f : I \to \mathbb{R}$

$f' : I \to \mathbb{R}$

Ist f' [illegible] diffbar:

$$(f')' =: f'' : I \to \mathbb{R}$$

rekursiv.

[illegible]:

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)', \quad n \geq 1.$$

Also:

$$f^{(1)} = f'$$

$$f^{(2)} = f''$$

$$f^{(3)} = f'''$$

$$f^{(4)} = f''''$$

$$f^{(0)} = f$$

Andere Bezeichnung:

$$f^{(n)} = D^n f = \partial^n f.$$

$$C^n(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ ist } n\text{-mal stetig diffbar} \}.$$

$f \in C^r(I)$: f C^r-Funktion.

"$r \to \infty$":

$C^\infty(I) := \bigcap C^r(I)$ Raum der unendlich oft stetig db. F. auf I.

$C^\infty(I) \subset C^{r+1}(I) \subsetneq C^r(I)$, $r \geq 0$

Beispiele:

1. $f \mapsto x^n$, $n \geq 0$ ist C^∞:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$(x^n)^{(r)} = n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)\,x^{n-r}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!}\,x^{n-r}, \quad 0 \leq r \leq n$$

Genauer:

$$(x^n)^{(n)} = n!$$
$$(x^n)^{(r)} = 0, \quad r \geq n+1.$$

2. Jedes Polynom ist C^∞.

3. $\sqrt{\ }$ ist auf $(0,\infty)$ C^∞.

4. $\exp$, $\sin$, $\cos$ sind C^∞:

$$\exp' = \exp \quad \Rightarrow \quad \exp^{(r)} = \exp$$
$$\sin' = \cos \quad \ldots$$
$$\cos' = -\sin. \quad \ldots$$

$$f, g \in C^n(D) \implies f+g \in C^n(D),$$

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

$$f, g \in C^n(D) \implies fg \in C^n,$$

$$(fg)^{(n)} = \ldots$$

__Beweis__: Sei $\varphi = f^{-1}$:

$$\varphi' = \underbrace{\frac{1}{f' \circ \varphi}}$$

Ist f' differenzierbar, so [illegible] Beweis [illegible] [illegible]

φ' diffbar:

$$\varphi'' = \left((f' \circ \varphi)^{-1} \right)'$$

$$= (-1) \cdot (f' \circ \varphi)^{-2} \cdot (f' \circ \varphi)'$$

$$= - \frac{1}{(f' \circ \varphi)^2} \cdot (f'' \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

$$= - \frac{f'' \circ \varphi}{(f' \circ \varphi)^3}$$

$$= - \underbrace{\left(\frac{f''}{f'^3} \right)} \circ \varphi .$$

$f'(t) \neq 0 \quad t \in I$

$$f \in C^2 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\quad}_{C^1} \quad \underbrace{\quad}_{C^0}}_{C^0}$$

Also: φ'' C^0.

"$\frac{0}{0}$" :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos^2 t}{t^2}$$

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)}$$

Proof : Generalized MVT :

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t)-f(a)}{g(t)-g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}$$ for some s between t and a.

$g'(s) \neq 0$

As $t \to a$, then we have $s \to a$:

Then $\lim_{s\to a} \frac{f'(s)}{g'(s)}$ exists,

then we have $\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{s\to a} \frac{f'(s)}{g'(s)}$. ∎

__Beispiele:__

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{2x+1} = \dfrac{2}{3}.$

2. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t}{1} = 1.$

3. $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{f'(t)}{1} = f'(a).$

   für $f \in C^1$

4. Von Typ nicht vergessen, ob "$\frac{0}{0}$":

$$0 = \frac{0}{1} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{\cos t} \neq \lim_{t\to 0} \boxed{\frac{2t}{-\sin t}} = \lim_{t\to 0} \frac{2}{-\cos t}$$

$$= -2$$

Exemples :

1. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 3}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{6x - 2}{6x} = \frac{2}{3}.$$

2. $$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t \cos t}{t} \qquad \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1} = 1.$$

3. Soit $f \in C^2$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \qquad \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} \qquad \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f''(a+h) + f''(a-h)}{2} = f''(a).$$

Der allgemeine Fall

"$\frac{\infty}{\infty}$", $\lim\limits_{t\to a}$, a Randpunkt von I.

$f, g \in C^1(I)$, a Randpunkt von I.

$I = (\alpha, \beta)$: $a = \alpha$, $a = \beta$

$I = [0, \infty)$: $a = \infty$

$$\lim_{t\to a} f(t) = 0, \quad \lim_{t\to a} g(t) = 0$$

oder

$$\lim_{t\to a} g(t) = \pm\infty$$

und $g' \neq 0$ auf einer punktierten Umgebung von a.

Dann gilt:

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \underbrace{\lim_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}}_{\text{Ex. in } \overline{\mathbb{R}}}$$

Beispiele :

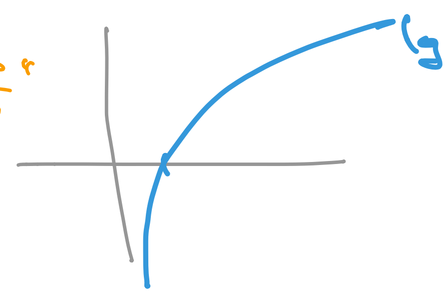
1. $$\lim_{t\to\infty} \underbrace{t^2}_{\to\infty}\,\underbrace{e^{-t}}_{\to 0} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} \quad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \qquad I = \mathbb{R}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{e^t} \quad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2}{e^t} = 0$$

2. Allgemein : $$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0 \,, \quad n \geq 0$$ ($n<0$ trivial)

3. $$\lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} \quad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$



$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}}{1}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0 .$$

$0 \cdot \infty$ oder $\infty - \infty$ kann man oft in geeignete Form bringen:

Beispiele:

1. $\lim\limits_{t \downarrow 0} (t \cdot \log t)$

$I = (0, \infty)$

$a = 0$

$0 \cdot (-\infty)$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\log t}{\frac{1}{t}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{t \downarrow 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \downarrow 0} (-t) = 0.$$

2. $\lim\limits_{t \to \infty} t \cdot \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$

$I = (0, \infty)$

$a = \infty$

"$\infty \cdot 0$"

$t = \frac{1}{s}$, $s \searrow 0$:

$= \lim\limits_{s \searrow 0} \dfrac{\log(1+s)}{s}$ "$\frac{0}{0}$"

$\overset{l'H}{=} \lim\limits_{s \searrow 0} \dfrac{\frac{1}{1+s}}{1} = 1.$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$n \in (0, \infty)$

$a = \infty$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \exp\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

$x = \exp(\log x)$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \exp\left(\underbrace{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\text{s.o.}}\right)$

$= \lim\limits_{t \to \infty} \exp\left(\underbrace{t \cdot \log\left(1+\frac{1}{t}\right)}_{\to 1}\right)$

$= \exp(1)$

$= e^1 = e.$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e.$

$f: I \to \mathbb{R}, \quad a \in I$

Stetigkeit:

$$f(a+h) = f(a) + \varepsilon(h), \qquad (n=0)$$

$\varepsilon: I \to \mathbb{R}$

stetig in a,

$\varepsilon(a) = 0.$

Differenzierbarkeit:

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{\in \mathbb{R}}\, h + \varepsilon(h)\cdot h \qquad (n=1)$$

⋮

Allgemein:

$$? \qquad f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} a_k h^k + \varepsilon(h)\cdot h^n \qquad (n \geq 1)$$

$\varepsilon(a) = 0.$

Sei eine Funktion $\varepsilon(h)$ gegeben et diffb.

Dann gilt: (i) :

$$\partial^k \left(\varepsilon(h)\cdot h^n \right)\Big|_{h=0} = 0, \quad 0 \leq k \leq n$$

Dann folgt:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} a_k h^k + r(h) h^n}$$

Für die Ableitung bei a, $k = 1, \dots, n$:

$$
\begin{aligned}
(\partial^k f)(a) &= f^{(k)}(a) \\
&= \partial^k \left(\sum \cdots \right)\Big|_{h=0} + \cancel{\partial^k (\quad)\Big|_{h=0}}^{\,0} \\
&= \partial^k (a_k h^k)\big|_{h=0} \\
&= k!\, a_k .
\end{aligned}
$$

Also:

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a).$$

Bsp:

$n = 0$: $\quad T_a^0 f = f(a)$

$n = 1$: $\quad T_a^1 f = f(a) + f'(a) h$

$n = 2$: $\quad T_a^2 f = f(a) + f'(a) h + \frac{1}{2} f''(a) h^2$.