■ Differenzierbare Funktionen

Definition *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar auf I, oder einfach differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion*

$$f'\colon\ I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f'(t)$$

die Ableitung von f. Ist f' außerdem stetig, so heißt f stetig differenzierbar auf I. Der Raum aller auf I stetig differenzierbaren reellen Funktionen wird mit $C^1(I)$ bezeichnet. ⋊

Offensichtlich gilt

$$C^1(I) \subsetneq C^0(I) \coloneqq C(I).$$

Es gibt sogar stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$, die in *keinem einzigen Punkt* differenzierbar sind.

7 **Satz** *Sind f und g in $C^1(I)$, so sind auch $f+g$ und fg in $C^1(I)$, und es gilt*

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

Verschwindet g nirgends auf I, so ist auch f/g in $C^1(I)$, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \qquad ⋊$$

Aufgrund dieses Satzes ist $C^1(I)$ nicht nur ein Vektorraum, sondern eine kommutative *Algebra* – das heißt, es ist neben der Addition eine Multiplikation erklärt, für die die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze gelten. — Nun noch die globale Kettenregel.

8 **Kettenregel** *Sind f und g beide C^1 und ist $g \circ f$ auf dem Definitionsbereich von f erklärt, so ist auch $g \circ f$ eine C^1-Funktion, und es gilt*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'. \qquad ⋊$$

Die globale Umkehrregel formulieren wir im nächsten Abschnitt $_{17}$, da wir hierfür den Monotoniesatz $_{15}$ benötigen.

8.2 Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Es liegt nahe, dass die Ableitung einer Funktion Aufschluss gibt über ihr lokales Verhalten. Man sollte zum Beispiel an ihr erkennen, ob sie monoton ist oder eine Extremstelle ausbildet. Dies wollen wir jetzt untersuchen.

Definition *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $c \in I$ ein lokales Minimum, wenn es eine Umgebung $U_\delta(c)$ gibt, so dass*

$$f(c) \leqslant f(t), \qquad t \in U_\delta(c) \cap I.$$

Sie besitzt in c ein striktes lokales Minimum, wenn außerdem für $t \neq c$ die strikte Ungleichung gilt. Entsprechend ist ein (striktes) lokales Maximum definiert. ⋊

Lokale Minima und Maxima werden gemeinsam als *Extrema* bezeichnet. Punkte, an denen ein lokales Extremum vorliegt, werden *Extremstellen* genannt, oder genauer *Minimal-* und *Maximalstellen*.

Der folgende Satz ist von fundamentaler Bedeutung für das Auffinden von Extremalstellen. Hierbei heißt $c \in I$ *innerer Punkt* des Intervalls I, wenn er kein Randpunkt ist.

9 **Satz von Fermat** *Besitzt $f : I \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt c von I ein lokales Extremum und ist f in diesem Punkt differenzierbar, so gilt $f'(c) = 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei zum Beispiel c eine Minimalstelle von f im Innern von I. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(c) \subset I$ und

$$f(c+h) \geqslant f(c), \qquad |h| < \delta.$$

Also gilt

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0, \qquad 0 < h < \delta,$$

und

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0, \qquad 0 > h > -\delta.$$

Abb 4 Verschiedene Minimalstellen

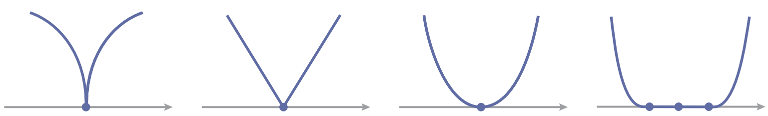
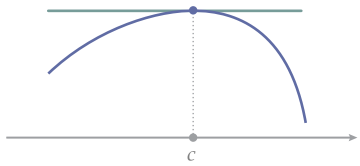


Abb 5

Satz von Fermat für eine Maximalstelle



Da wegen der Differenzierbarkeit von f im Punkt c der Grenzwert für $h \to 0$ existiert, folgt aus diesen Ungleichungen sowohl $f'(c) \geqslant 0$ als auch $f'(c) \leqslant 0$. Also ist $f'(c) = 0$. ⟫⟫⟫

Beide Voraussetzungen des Satzes – Lage der Extremstelle c im Innern und Differenzierbarkeit im Punkt c – sind *notwendig*. In einer Extremstelle am Rand muss die Ableitung nicht verschwinden, und an einer Extremstelle im Innern muss eine Funktion nicht differenzierbar sein.

Das Kriterium von Fermat ist allerdings nur *notwendig*, aber *nicht hinreichend*. Ein kritischer Punkt ist nicht notwendigerweise eine Extremstelle – siehe Abbildung 6.

Punkte, in denen die Ableitung einer Funktion verschwindet, haben eine besondere Bedeutung und deshalb auch einen besonderen Namen.

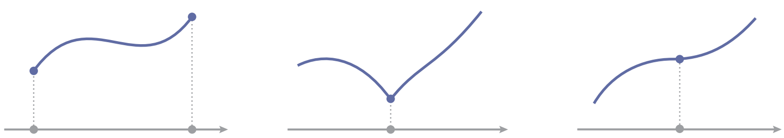
Definition *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ im Punkt c differenzierbar und $f'(c) = 0$, so heißt c ein stationärer oder kritischer Punkt von f.* ⋊

Der Satz von Fermat besagt also, dass eine Extremstelle im Innern notwendig ein kritischer Punkt ist, wenn die Funktion dort differenzierbar ist. Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von f an einer solchen Extremstelle eine *horizontale Tangente* aufweist.

Mittelwertsätze

Als erste Anwendung des Satzes von Fermat erhalten wir sogenannte Mittelwertsätze. Zuerst betrachten wir einen Spezialfall.

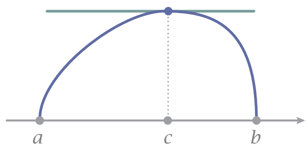
Abb 6 Zum Satz von Fermat



Extremstellen am Rand respektive nicht differenzierbar *Kritischer Punkt nicht extremal*

Abb 7

Satz von Rolle



10 **Satz von Rolle** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *differenzierbar. Gilt* $f(a) = f(b)$*, so existiert ein Punkt* $c \in (a,b)$ *mit* $f'(c) = 0$*. Somit besitzt* f *einen kritischen Punkt im Innern von* $[a,b]$*.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Ist f konstant, so verschwindet f' überall, und *jeder* Punkt in $[a,b]$ ist ein kritischer Punkt. Sei also f nicht konstant. Die stetige Funktion f nimmt auf $[a,b]$ ihr Minimum und Maximum an, und beide können nicht gleichzeitig am Rand liegen, da f sonst konstant wäre. Also besitzt f wenigstens eine Extremalstelle c im Innern von $[a,b]$. Da f dort auch differenzierbar ist, ist nach dem Satz von Fermat $_9$ $f'(c) = 0$. ⟩⟩⟩⟩

Der Satz von Rolle gilt natürlich erst recht, wenn f auf ganz $[a,b]$ differenzierbar ist. Es ist aber sinnvoll, hier und im Folgenden nur die Differenzierbarkeit auf (a,b) zu verlangen, um auch Funktionen zu erfassen, die in den Endpunkten des Intervalls stetig, aber *nicht* differenzierbar sind, wie zum Beispiel in Abbildung 7. Und überhaupt vermeidet ein Mathematiker gerne Bedingungen, die er nicht benötigt.

Übrigens war Rolle ein französischer Mathematiker, sein Name wird daher ohne ›e‹ gesprochen. — Nun der allgemeine Fall.

11 **Mittelwertsatz** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *differenzierbar. Dann existiert ein Punkt* $c \in (a,b)$ *mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Betrachte die Hilfsfunktion φ mit

$$\varphi(t) = f(t) - m(t - a), \qquad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

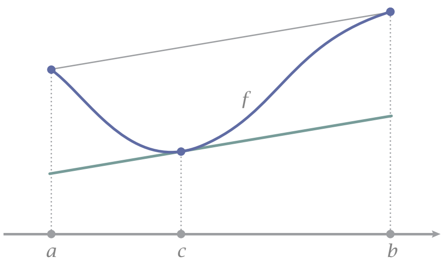
Mit anderen Worten, wir subtrahieren von der Funktion f die Sekante durch die Eckpunkte ihres Graphen. Für diese Funktion gilt $\varphi(a) = \varphi(b)$. Auch ist φ auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Nach dem Satz von Rolle $_{10}$ existiert also ein $c \in (a,b)$ mit

$$\varphi'(c) = f'(c) - m = 0.$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

Abb 8

Zum Mittelwertsatz



Der Quotient im Mittelwertsatz stellt die *mittlere Steigung* der Funktion f im Intervall $[a,b]$ dar. Der Mittelwertsatz sagt also aus, dass an wenigstens einer Stelle im Innern des Intervalls die Tangentensteigung gleich der mittleren Steigung ist. Der Satz von Rolle ist hiervon ein Spezialfall, denn für $f(b) = f(a)$ ist die mittlere Steigung 0. Andererseits haben wir den Mittelwertsatz gerade mit dem Satz von Rolle bewiesen. Beide Sätze sind somit *äquivalent*.

12 **Allgemeiner Mittelwertsatz** *Seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar, und $g' \neq 0$ auf (a,b). Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \quad \rtimes$$

⟪⟪ Es ist $g(a) \neq g(b)$, da andernfalls g in (a,b) aufgrund des Satzes von Rolle einen krtitischen Punkt hätte. Also ist

$$\varphi(t) = f(t) - m(g(t) - g(a)), \qquad m = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

auf $[a,b]$ wohldefiniert, stetig und auf (a,b) differenzierbar. Außerdem ist wieder $\varphi(a) = \varphi(b)$. Aufgrund des Satzes von Rolle existiert ein kritischer Punkt $c \in (a,b)$ mit

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - mg'(c).$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. ⟫⟫

Bemerkung Mit $g = id$ erhält man den vorherigen Mittelwertsatz. ⊸

▪ Folgerungen

13 **Schrankensatz** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt für alle $u,v \in [a,b]$ mit $u < v$ die Ungleichung*

$$|f(v) - f(u)| \leqslant (v-u)\,\|f'\|_{(u,v)}.$$

Ist f' auf (a,b) beschränkt, so ist f L-lipschitz mit $L = \|f'\|_{(a,b)}$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wenden wir den Mittelwertsatz 11 auf zwei beliebige Punkte u und v mit $u < v$ an, so erhalten wir ein $c \in (u,v)$ mit

$$f(v) - f(u) = f'(c)(v-u).$$

Daraus folgt

$$|f(v) - f(u)| \leqslant (v-u) \sup_{t \in (u,v)} |f'(t)| = (v-u) \, \|f'\|_{(u,v)} .$$

Die zweite Behauptung folgt mit $\|f'\|_{(u,v)} \leqslant \|f'\|_{(a,b)}$ für alle $u,v \in [a,b]$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Eine unmittelbare Folgerung ist der

14 **Konstanzsatz** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann ist f konstant auf $[a,b]$ genau dann, wenn $f' = 0$ auf (a,b).* ⋊

Eine äquivalente, häufig verwendete Formulierung ist folgende. Sind f und g auf $[a,b]$ stetig, auf (a,b) differenzierbar, und gilt dort $f' = g'$, so unterscheiden sich diese Funktionen nur durch eine additive Konstante. Diese Situation wird uns bei der Betrachtung von Stammfunktionen begegnen ??.

15 **Monotoniesatz** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann ist f ist monoton steigend auf $[a,b]$ genau dann, wenn $f' \geqslant 0$ auf (a,b). Gilt sogar $f' > 0$ auf (a,b), so ist f streng monoton steigend. Entsprechendes gilt für monoton fallend.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu je zwei Punkten $u < v$ in $[a,b]$ existiert aufgrund des Mittelwertsatzes 11 ein Punkt $c \in (u,v) \subset (a,b)$ mit

$$f(v) - f(u) = f'(c)(v-u) \geqslant 0.$$

Ist also $f' \geqslant 0$ auf (a,b), so folgt hieraus $f(v) - f(u) \geqslant 0$, und f ist monoton steigend. Umgekehrt ist für eine monoton steigende Funktion jeder Differenzenquotient nichtnegativ, also

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \geqslant 0, \qquad t, t+h \in [a,b].$$

Dasselbe gilt dann auch für den Grenzwert $h \to 0$, also f'.

Die letzte Behauptung zeigt man analog. ⟩⟩⟩⟩⟩

Man beachte, dass umgekehrt aus der strengen Monotonie *nicht folgt*, dass die Ableitung nirgends verschwindet. So ist die kubische Parabel $t \mapsto t^3$ streng monoton steigend, aber ihre Ableitung $3t^2$ verschwindet bei $t = 0$.

Aus dem Monotoniesatz ergibt sich ein einfaches Kriterium für das Vorliegen einer Extremalstelle. Die zweite Ableitung f'' definieren wir formal im nächsten Abschnitt.

8.14

16 **Satz** *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und besitze im Innern von I einen kritischen Punkt c.*

(i) *Ist f' in einer Umgebung von c streng monoton steigend respektive fallend, so besitzt f in c ein striktes lokales Minimum respektive Maximum.*

(ii) *Ist auch f' stetig differenzierbar, so ist $f''(c) < 0$ respektive $f''(c) > 0$ dafür hinreichend.* ⋊

⟪⟪⟪ (i) Angenommen, f' ist in einer Umgebung $U_\delta(c) \subset I$ streng monoton steigend. Wegen $f'(c) = 0$ ist dann $f'(t) < 0$ für $t \in (c-\delta, c)$ und $f'(t) > 0$ für $t \in (c, c+\delta)$. Also ist f auf $(c-\delta, c)$ streng monoton fallend und auf $(c, c+\delta)$ streng monoton steigend. Das aber bedeutet, dass

$$f(c) < f(c+h), \qquad 0 < |h| < \delta.$$

Somit liegt bei c ein striktes Minimum.

(ii) Sei zum Beispiel $f''(c) < 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f'' gilt dies dann auch in einer kleinen Umgebung von c. Somit ist f' in dieser Umgebung streng monoton fallend $_{15}$, und (*(i)*) ist anwendbar. ⟫⟫⟫

▹ *Beispiel* In welchem Verhältnis müssen Höhe h und Radius r einer Konservendose gewählt werden, um bei vorgegebenen Volumen V den Blechbedarf zu minimieren? Für Volumen und Oberfläche gilt

$$V = \pi r^2 h, \qquad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Auflösen der Volumengleichung nach h auf und Einsetzen in die Oberflächengleichung ergibt

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Da $A(r)$ unbeschränkt ist für $r \searrow 0$ und $r \nearrow \infty$, muss aus Stetigkeitsgründen mindestens ein Minimum auf $(0, \infty)$ vorliegen. Nach dem Satz von Fermat ist dort notwendigerweise

$$0 = A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

Da es nur einen einzigen kritischen Punkt gibt, muss dieser die Minimalstelle sein, auch ohne weitere Betrachtung von A' oder A''. ◂

Schließlich erhalten wir noch einen handlichen Satz über Umkehrfunktionen.

17 **Satz über C¹-Umkehrfunktionen** *Ist f in $C^1(I)$ und $f' \neq 0$ auf ganz I, so ist f umkehrbar, die Umkehrfunktion f^{-1} ist auf dem Intervall $J = f(I)$ ebenfalls C^1, und es gilt dort*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Da f' auf I stetig ist und nirgends verschwindet, hat f' festes Vorzeichen. Aufgrund des Monotoniesatzes [15] ist daher f streng monoton und somit umkehrbar. Aufgrund des Umkehrsatzes [6] ist, da f' nirgends verschwindet, die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ auf $f(I)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Diese ist offensichtlich ebenfalls stetig. Somit ist f^{-1} ebenfalls C^1. ⟩⟩⟩⟩⟩

8.16