17. Vorlesung 15. 1. 2021

$$C^1(I) \subsetneq C(I) =: C^0(I).$$

Produktregel:

$$(fg)'(x) = \underbrace{f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}_{\text{stetig}}, \quad x \in I$$

Für $f, g \in C^1$:

Also: $fg \in C^1(I)$

Für $g \in C^1(I)$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\underbrace{g(x)^2}_{\text{stetig},\ >0}} \quad \Big\}\ \text{stetig auf } I$$

$\frac{f}{g} \in C^1(I)$.

$C^1(I)$ ist reeller Vektorraum: $\alpha f + \beta g \in C^1(I)$

sogar Algebra: $fg \in C^1(I)$.

Kettenregel:

$$f : I \longrightarrow J$$
$$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\Big\{$ $g \circ f$ auf I wohldefiniert

....

Dann $g \circ f \in C^1(I)$:

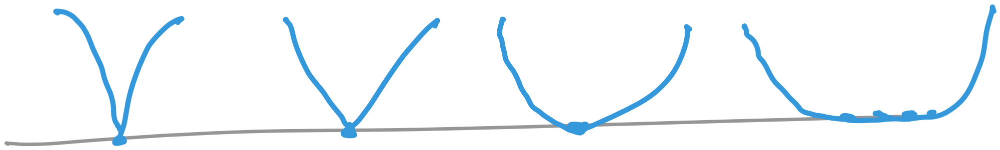
$$(g \circ f)'(t) = \underbrace{g'(f(t)) \cdot \underbrace{f'(t)}_{\text{stetig}}}_{\text{stetig}}$$

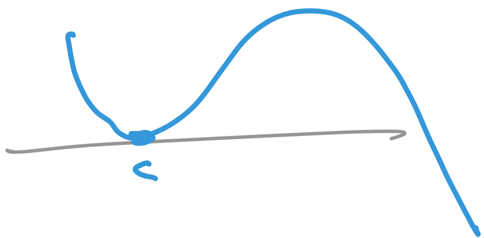
$$f(c) \leq f(t), \qquad t \in U_\delta(c) \cap I$$

lokales Minimum bei c.

$$f(c) < f(t), \qquad t \in \dot{U}_\delta(c) \cap I$$

strikt lokales Minimum bei c.





Beweis: Sei c Minimalstelle von f:

$$f(c+h) \geq f(c), \quad |h| < \delta,$$

da c innerer Punkt: $U_\delta(c) \subset I$

Dann gilt also:

$$\text{(i)} \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad 0 < h < \delta$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad -\delta < h < 0$$

Da f im Punkt c differenzierbar:

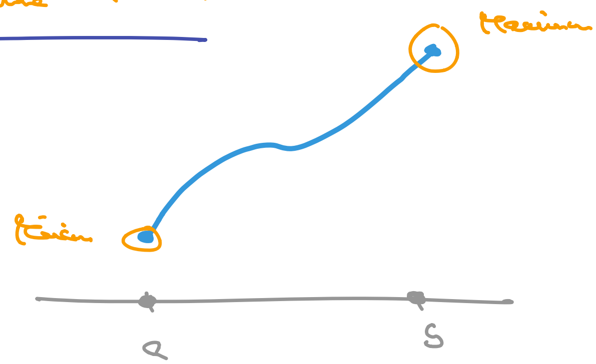
$\lim_{h \to 0} \ldots = f'(c)$ existiert

wird

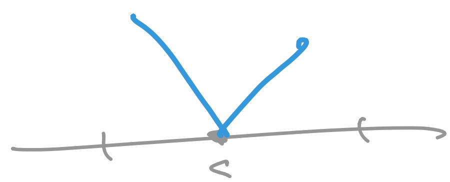
$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & f'(c) \geq 0 \\ \text{(ii)} & f'(c) \leq 0 \end{array}\right\} \quad \underline{f'(c) = 0.}$$

$\blacksquare$

c innerer Punkt:

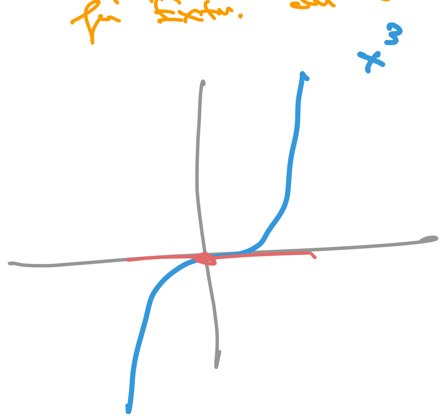


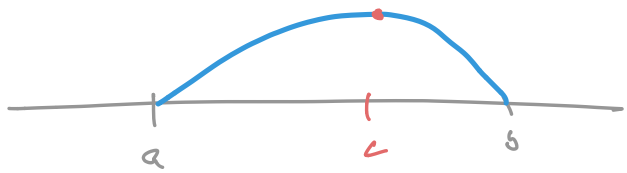
diffbar:

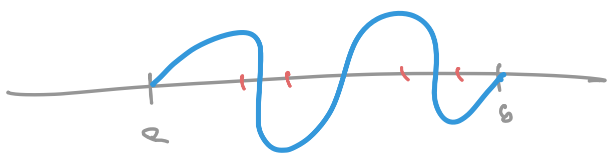


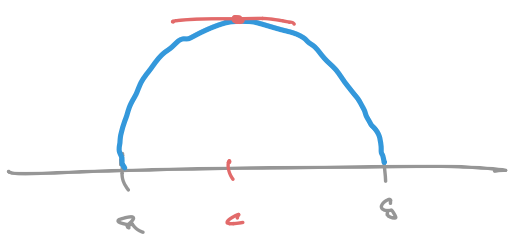
"Fermat" notwendig, aber nicht hinreichend

für Extr. im Innern




a
c
b


a
b


a
c
b

Spezial: Sei f konstant:

$$f(x) = f(a) = f(b), \quad x \in [a,b]$$

Dann

$$f'(x) = 0, \quad x \in [a,b].$$

Sei f nicht konstant:

f stetig auf $[a,b]$,
nimmt das Minimum und Maximum an

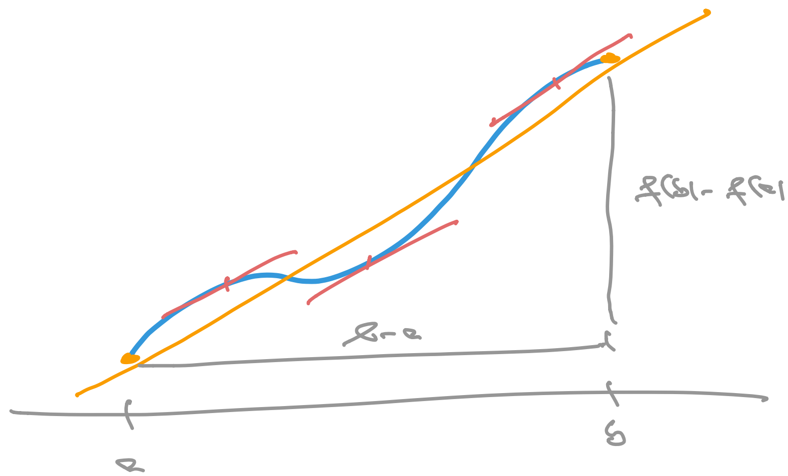
Eines der Extremwerte kann nicht gleichzeitig Randpunkt von $[a,b]$ sein.

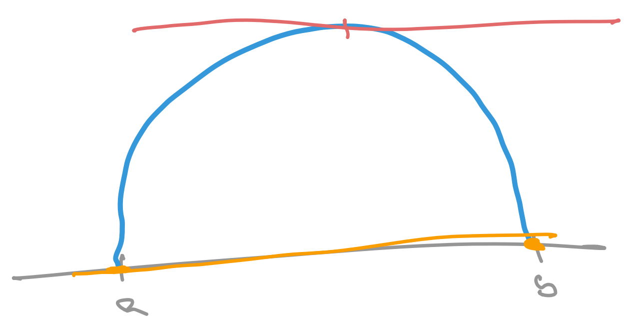
Es gibt also mindestens einen Extremwert c im Innern, also $c \in (a,b)$.

Damit Fermat anwenden:

$$f'(c) = 0. \qquad \square$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$





[illegible]: [illegible]:

$$\varphi(t) = f(t) - m(t-a)$$

[illegible], [illegible] $\varphi(a) = \varphi(b)$:

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Rolle: [illegible] [illegible] $c \in (a,b)$:

$$\varphi'(c) = 0$$

$$f'(c) - m$$

[illegible] $f'(c) = m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\blacksquare$

$u, v \in [a,b]$, $u < v$:

$$f(v) - f(u) = (v-u) \cdot f'(c) \quad \text{für ein } c \in (u,v)$$

Daraus

$$|f(v) - f(u)| = (v-u)\, |f'(c)|$$

$$\leq |v-u| \cdot \sup_{u<t<v} |f'(t)|$$

$$= (v-u) \cdot \|f'\|_{(u,v)}$$

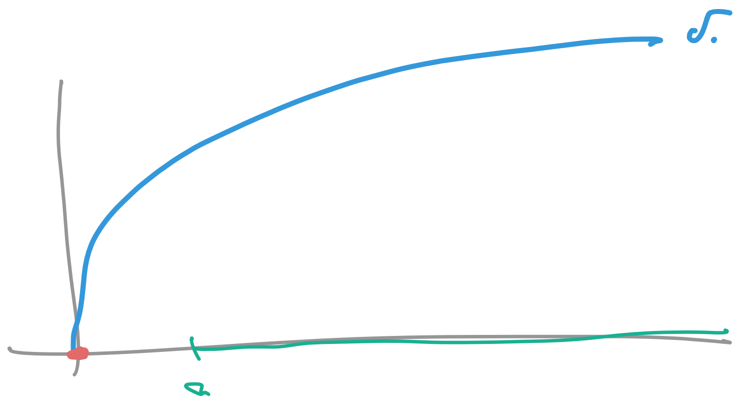
Falls $|f'(t)| \leq C$, $t \in (a,b)$

$\iff \|f'\|_{(a,b)} \leq C$

Dann:

$$\underbrace{|f(v) - f(u)| \leq C \cdot |v-u|, \quad u,v \in [a,b]}_{C\text{- Lipschitz.}}$$

Beispiel: $\sqrt{t}$ auf $[a,\infty)$, $a>0$



$$\sqrt{t}\,' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}, \quad t \geq a.$$

$$\| \sqrt{\cdot}\,' \|_{[a,\infty)} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Also: $\sqrt{\cdot}$ Lipschitz auf $[a,\infty)$, $a>0$,

mit $L = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Das geht nicht für $a=0$.

$f \equiv c$ auf $[a,b]$ $\iff$ $f' = 0$ auf (a,b)

"$\Longrightarrow$" $\quad f' \equiv 0$.

$\Longleftarrow$ Sei $u < v$:

$$|f(v) - f(u)| \le (v-u) \cdot \cancel{\sup_{\dots} |f'(\xi)|}$$

$$= 0$$

also: $f(v) = f(u)$, $\quad u, v \in (a,b)$. $\square$

Beispiel: f, g auf $[a,b]$ stetig,

$f' = g'$ auf (a,b),

dann

$$f = g + c.$$

Dem: $f - g$ stetig, $(f-g)' = 0$

also: $f - g = \text{const}$. $\square$

f auf $[a,b]$ stetig, auf (a,b) diffbar.

$f' \geq 0$ (>) auf (a,b) $\Longrightarrow$ f (streng) monoton steigend:

$u < v$ in $[a,b]$:

$$f(v) - f(u) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0\ (>)}\underbrace{(v-u)}_{>0}, \quad \text{mit } c \in (u,v)$$

$$\geq 0 \ (>)$$

also: $f(v) \geq f(u)$ (>), $u < v$.

f monoton steigend $\Longrightarrow$ $f' \geq 0$ auf (a,b):

$f(t+h) > f(t)$, $h > 0$

$$\Longrightarrow \frac{f(t+h) - f(t)}{h} > 0, \quad h > 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{h \to 0} \text{—} = f'(t) \geq 0.$$

$\square$

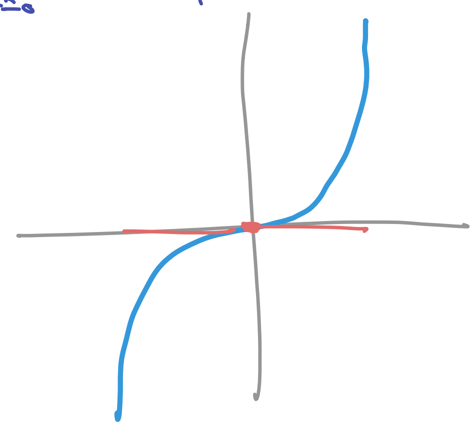
Aber: f streng monoton steigend $\not\Longrightarrow$ $f' > 0$:

$f(t) = t^3$

$f(x) = x^3$ streng monoton steigend,

aber $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$,

also $f' \not> 0$



Beweis: Angenommen: f' ist auf $U_\delta(c) \subset I$ streng monoton steigend.

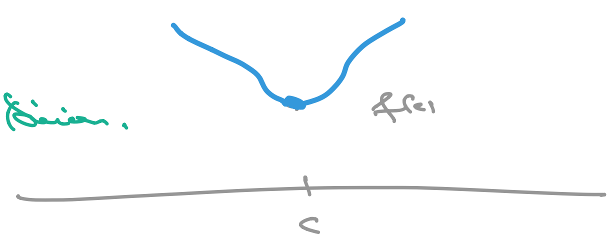
Da $f'(c) = 0$:

$f \downarrow \;\Leftarrow\; f'(x) < 0$ für $x \in (c-\delta, c)$

$f \uparrow \;\Leftarrow\; f'(x) > 0$ für $x \in (c, c+\delta)$

Also:

$f(c)$ strikte Minimum.



(iii) $\quad f''(c) < 0$

$\Rightarrow \quad f'$ streng monoton fallend in Umgebung von c.

Beispiel:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

3 Nullstellen: $\quad 0, \; -1, \; +1.$

Dann

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$= \begin{cases} 8 > 0, & x = \pm 1 \\ -4 < 0, & x = 0 \end{cases}$$

Also: lokales Maximum bei $x = 0$

lokales Minimum bei $x = \pm 1$

$f(x) = (x^2 - 1)^2$: