8

Differenziation

Die Ableitung einer Funktion $f\colon t \mapsto f(t)$ in einem Punkt a beschreibt ihr punktuelles *Veränderungsverhalten* in der Nähe eines Punktes a. Dazu betrachtet man die Änderung der abhängigen Größe, $f(t) - f(a)$, *im Verhältnis* zur Änderung der unabhängigen Größe, $t - a$, wenn t sich a nähert.

Im einfachsten Fall ist dieses Verhältnis *konstant*, nämlich dann, wenn es sich bei f um eine *lineare* oder *affine* Funktion der Gestalt $\alpha\colon t \mapsto mt + b$ handelt. Andernfalls kann man versuchen, eine solche affine Funktion zu finden, die die gegebene Funktion in der Umgebung von a am besten *approximiert*. Existiert eine solche bestapproximierende Gerade, so ist sie eindeutig – es handelt sich um die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt a. Ihre Steigung m ist dann die Ableitung von f im Punkt a.

Diese Interpretation der Ableitung als Steigung einer bestapproximierenden Geraden werden wir später auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Diese Steigung erscheint dort als lineare Abbildung zwischen Vektorräumen.

Doch zunächst beginnen wir mit der klassischen Definition der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten.

Abb 1

Tangente an einen Graphen

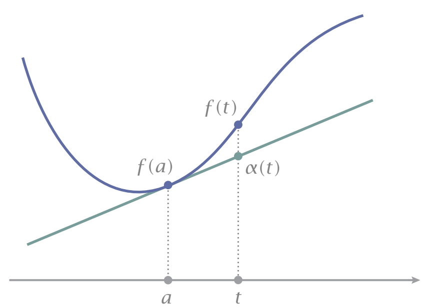
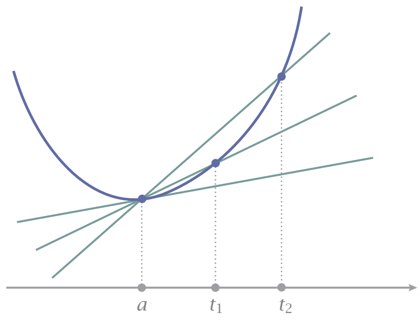


Abb 2

Sekanten und Tangente an einen Graphen



8.1 Definitionen und Rechenregeln

Im Folgenden sei I immer ein *nichtentartetes Intervall*, also ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Ferner sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf I. Die folgende Definition der Differenzierbarkeit in einem Punkt ist wahrscheinlich aus der Schule vertraut.

Definition *Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $a \in I$, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = m$$

existiert. In diesem Fall heißt m die erste Ableitung von f im Punkt a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet. ⋊

Dieser Definition liegt folgende geometrische Anschauung zugrunde. Der Differenzenquotient

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

beschreibt die Steigung der Sekante durch die Punkte des Graphen von f über a und t. Konvergieren diese Steigungen für $t \to a$ gegen einen Grenzwert m, so kann man diesen als *infinitesimale Steigung* von f im Punkt a auffassen. Die Grenzlage der Sekanten bildet dann eine *Tangente* an den Graphen von f.

Da t nur in der Nähe von a zu betrachten ist, schreibt man oft $t = a + h$ und nimmt h als hinreichend klein an. Damit wird

$$f'(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Unbefriedigend an dieser Definition ist allerdings, dass sie sich in dieser Form nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt, da eine Division durch

Vektoren nicht sinnvoll erklärt werden kann. Um dieses Problem zu umgehen, charakterisieren wir Differenzierbarkeit noch auf andere, äquivalente Weisen.

1 **Differenzierbarkeitssatz** *Für eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $a \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist differenzierbar in a mit $f'(a) = m$.*

(ii) *Es gibt eine reelle Zahl m, so dass*

$$\lim_{t \to a} \frac{|f(t) - f(a) - m(t-a)|}{|t-a|} = 0. \tag{1}$$

(iii) *Es gibt eine reelle Zahl m und eine im Punkt a stetige Funktion $\varepsilon\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(a) = 0$, so dass*

$$f(t) = f(a) + m(t-a) + \varepsilon(t)(t-a). \tag{2}$$

(iv) *Es gibt eine im Punkt a stetige Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, so dass*

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a), \qquad t \in I. \tag{3}$$

In diesem Fall ist $\varphi(a) = f'(a)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ (i) ⇔ (ii) Die Definition von m als Ableitung ist äquivalent mit

$$0 = \lim_{t \to a} \left(\frac{f(t) - f(a)}{t-a} - m \right) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a) - m(t-a)}{t-a},$$

und dies ist äquivalent mit (1).

(ii) ⇔ (iii) Gleichung (2) ist für $t \neq a$ äquivalent mit

$$\varepsilon(t) = \frac{f(t) - f(a) - m(t-a)}{t-a}.$$

Somit ist (1) äquivalent dazu, ε durch 0 stetig nach a fortsetzen zu können.

(iii) ⇔ (iv) Dies ergibt sich mit $\varphi(t) = m + \varepsilon(t)$. ⟩⟩⟩⟩

Wir haben nicht verlangt, dass eine im Punkt a differenzierbare Funktion dort auch stetig ist. Da in Gleichung (3) aber φ im Punkt a stetig ist, ist es auch die gesamte rechte Seite dieser Gleichung. Ist also f im Punkt a differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

Gleichungen (1) und (2) erlauben folgende geometrische Interpretation. Die affine Funktion

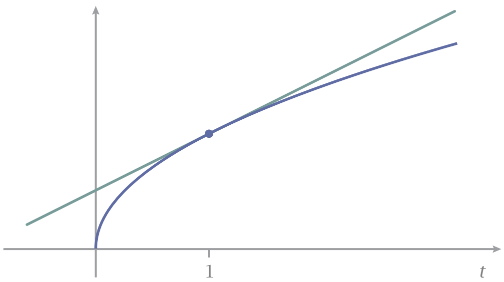
$$\lambda\colon\ t \mapsto \lambda(t) = f(a) + m(t-a)$$

beschreibt eine Gerade durch den Punkt des Graphen von f über a mit der Steigung m, und für diese gilt

$$\lim_{t \to a} \frac{|f(t) - \lambda(t)|}{|t-a|} = 0.$$

Abb 3

Wurzelfunktion mit Tangente um Punkt 1



Der *Approximationsfehler* $|f - \lambda|$ zwischen Funktion und Geraden verschwindet also schneller als $|t - a|$ für $t \to a$. Diese Eigenschaft bestimmt diese Gertade sogar *eindeutig* A-35. Somit definiert λ die *bestapproximierende Gerade* an den Graphen von f in diesem Punkt. Man nennt die Gerade λ mit

$$\lambda(t) = f(a) + f'(a)(t - a)$$

die *Linearisierung* und ihr Bild die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt a.

2 ⊳ *Beispiele* A. Jede konstante Funktion hat überall Ableitung 0.

B. Jede affine Funktion $\alpha\colon t \mapsto mt + b$ ist in jedem Punkt differenzierbar, denn für alle t und h gilt

$$\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = m.$$

Also ist $\alpha'(t) = m$ für alle t. Ihre Linearisierung im Punkt a ist

$$\lambda(t) = \alpha(a) + m(t - a) = ma + b + m(t - a) = \alpha(t).$$

Jede Gerade ist daher in jedem Punkt ihre eigene Tangente.

C. Die Wurzelfunktion $t \mapsto \sqrt{t}$ ist in jedem Punkt $t > 0$ differenzierbar, denn

$$\frac{\sqrt{t+h} - \sqrt{t}}{h} = \frac{1}{h}\frac{h}{\sqrt{t+h} + \sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t+h} + \sqrt{t}}$$

und damit

$$(\sqrt{t})' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{t+h} - \sqrt{t}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \qquad t > 0.$$

Im Punkt $a = 1$ beispielsweise ist die Linearisierung $t \mapsto 1 + (t - 1)/2$ Abb 3.

Bei $t = 0$ dagegen divergiert der Differenzenquotient, und die Wurzelfunktion ist in 0 *nicht* differenzierbar.

D. Die Betragsfunktion $|\cdot|$ ist im Punkt 0 *nicht* differenzierbar, da es dort keine eindeutige bestapproximierende Tangente gibt. ⊲

▪ Rechenregeln

3 **Satz** *Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ differenzierbar, so sind es auch $f+g$, fg, und falls $g(a) \neq 0$, auch f/g, und es gelten die Summen-, Produkt- und Quotientenregeln*

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= (f'+g')(a)\\ (fg)'(a) &= (f'g+fg')(a)\\ (f/g)'(a) &= ((f'g-fg')/g^2)(a).\end{aligned}$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨ Im Folgenden verwenden wir immer Kriterium (iv) von Satz 1. Wir schreiben also

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a), \qquad g(t) = g(a) + \psi(t)(t-a),$$

mit in a stetigen Funktionen φ und ψ, wobei $\varphi(a) = f'(a)$ und $\psi(a) = g'(a)$. Für das Produkt beispielsweise folgt daraus

$$\begin{aligned}(fg)(t) &= f(t)g(t)\\ &= f(a)g(a) + [f(a)\psi(t) + \varphi(t)g(a)]\,(t-a)\\ &\qquad + \varphi(t)\psi(t)(t-a)^2\\ &= (fg)(a) + [f(a)\psi(t) + \varphi(t)g(a) + \varphi(t)\psi(t)(t-a)]\,(t-a).\end{aligned}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist stetig im Punkt a und hat dort den Wert

$$f(a)\psi(a) + \varphi(a)g(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a).$$

Also ist fg in a differenzierbar mit der behaupteten Ableitung. Die übrigen Aussagen werden analog bewiesen. ⟩⟩⟩⟩

4 **Satz** *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$(t^n)' = nt^{n-1},$$

wobei $t \neq 0$ für $n \leqslant 0$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Für $n = 0$ ist dies die Ableitung der konstanten Funktion, $(1)' = 0$. Für $n = 1$ ist es die Ableitung der Identität, $(t)' = 1$. Mit Induktion über n und der Produktregel folgt für $n \geqslant 1$

$$(t^{n+1})' = (t^n t)' = (t^n)'t + t^n(t)' = nt^{n-1}t + t^n = (n+1)t^n.$$

Für $n < 0$ erhält man hieraus mit der Quotientenregel

$$(t^n)' = \left(\frac{1}{t^{-n}}\right)' = \frac{-(t^{-n})'}{(t^{-n})^2} = \frac{nt^{-n-1}}{t^{-2n}} = \frac{n}{t^{-n+1}} = nt^{n-1}.$$ ⟩⟩⟩⟩

- Ein reelles Polynom ist überall differenzierbar, und es gilt

$$\Bigl(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\Bigr)' = \sum_{k=0}^{n} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}.$$

Kettenregel und Umkehrregel

Wie bei der Stetigkeit untersuchen wir nun die Frage, unter welchen Bedingungen die Differenzierbarkeit bei Verkettung und Umkehrung von Funktionen erhalten bleibt. — Zuerst die Verkettung zweier Funktionen.

5 **Kettenregel** *Es seien $f : I \to J$ im Punkt $a \in I$ und $g : J \to \mathbb{R}$ im Punkt $f(a) \in J$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Nach Voraussetzung ist

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a), \qquad g(s) = g(b) + \psi(s)(s-b),$$

mit in a respektive $b = f(a)$ stetigen Funktionen φ und ψ, wobei $\varphi(a) = f'(a)$ und $\psi(b) = g'(b)$. Setzen wir $s = f(t)$ und $b = f(a)$, so erhalten wir

$$f(t) - f(a) = s - b = \varphi(t)(t-a)$$

und weiter

$$(g \circ f)(t) = (g \circ f)(a) + [\psi(f(t))\varphi(t)]\,(t-a).$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist stetig im Punkt a mit Wert

$$\psi(f(a))\varphi(a)) = g'(f(a))f'(a).$$

Also ist $g \circ f$ in a differenzierbar mit der behaupteten Ableitung.

Man beachte, dass nur die Differenzierbarkeit von f und g in den Punkten a respektive $b = f(a)$ gefordert wird. Differenzierbarkeit in anderen Punkten wird nicht benötigt. Dasselbe gilt für die Umkehrregel 6.

- *Beispiel* Die Funktion

$$f : t \mapsto \sqrt{1+t^2}$$

kann als Komposition der Wurzel $g : x \mapsto \sqrt{x}$ mit dem Polynom $h : t \mapsto 1 + t^2$ aufgefasst werden. Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = g'(x)\Big|_{x=h(t)} h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=h(t)} 2t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

8.6

6 **Umkehrregel** *Sei $f: I \to J$ stetig und bijektiv. Ist f im Punkt $a \in I$ differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to I$ im Punkt $b = f(a)$ differenzierbar, und es gilt*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \tag{4}$$

⟪⟪ Nach Voraussetzung ist wieder $f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a)$ mit einer im Punkt a stetigen Funktion φ, wobei $\varphi(a) = f'(a) \neq 0$. Es existiert dann ein $\delta > 0$, so dass $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in U_\delta(a) \cap I$. Für diese t können wir die erste Gleichung umformen zu

$$t = a + \frac{f(t) - f(a)}{\varphi(t)}.$$

Setzen wir $s = f(t)$ und $b = f(a)$ und schreiben $g = f^{-1}$, so ist $t = g(s)$ und $a = g(b)$, und die letzte Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$g(s) = g(b) + \frac{s-b}{\varphi(g(s))}.$$

Da der Nenner im Punkt b stetig ist und nicht verschwindet, ist g im Punkt b differenzierbar, und die Ableitung ist wie behauptet.

$$g'(b) = \frac{1}{\varphi(g(b))} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$ ⟫⟫

Man kann Gleichung (4) leicht *rekonstruieren*. Aus $f^{-1}(f(t)) = t$ folgt mit der Kettenregel 5

$$(f^{-1})'(f(t))f'(t) = 1,$$

also

$$(f^{-1})'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}.$$

Dies ist allerdings *kein Ersatz* für den vorangehenden Beweis. Wir müssen ja zuerst *wissen*, dass f^{-1} im Punkt b differenzierbar ist, bevor wir die Kettenregel anwenden dürfen.

▹ *Beispiel* Die Parabel $f: t \mapsto t^2$ ist für $t \geqslant 0$ strikt wachsend, bijektiv und differenzierbar mit Ableitung

$$f'(t) = 2t.$$

Diese ist nicht Null für $t > 0$. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ ist deshalb in jedem Punkt $x = t^2 > 0$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2g(x)}.$$

Für die Wurzelfunktion erhalten wir also wieder das Ergebnis von Beispiel 2,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Andererseits ist $f'(0) = 0$, und in $0 = f(0)$ ist die Wurzelfunktion auch tatsächlich nicht differenzierbar. Die Annahme, dass f' im betrachteten Punkt nicht verschwinden darf, ist also notwendig. ◅

8.8