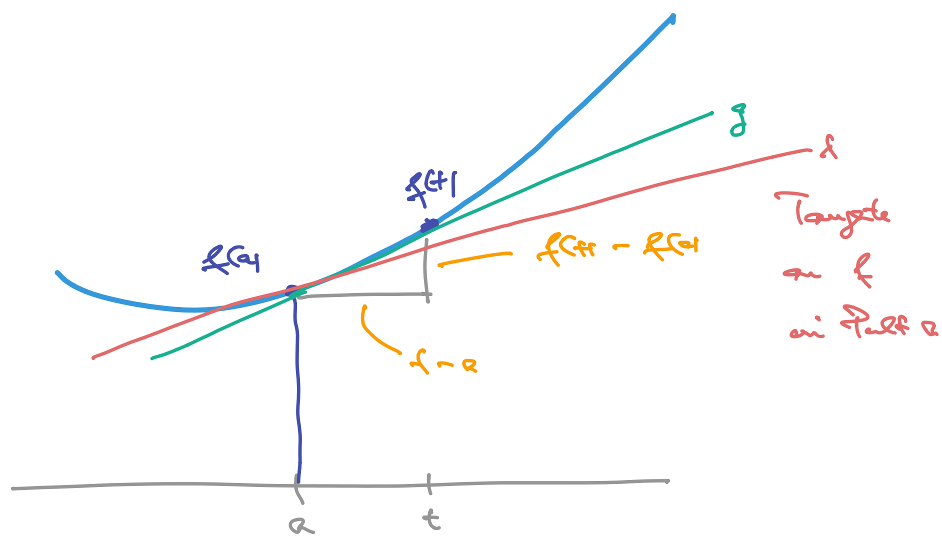
16. Vorlesung 13. 1. 2021

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

I Intervall $a \in I$



$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existiert ?

t nahe bei a: $t = a + h$, h „klein":

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$$

$t = a + h$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$.

?

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$= (h_1, \ldots, h_n)$

Beweis : (i) $\Longrightarrow$ (ii)

$$m = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = \lim_{t \to a} \left(\frac{f(t) - f(a)}{t-a} - m \right)$$

$$= \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a) - m(t-a)}{t-a}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = \lim_{t \to a} \left| \quad \right|$$

$$= \lim_{t \to a} \frac{|f(t) - f(a) - m(t-a)|}{|t-a|} \quad (*)$$

(ii) ⟺ (iii)

$$f(t) = f(a) + m(t-a) + \varepsilon(t)\cdot(t-a)$$

⟺

$$\varepsilon(t) = \frac{f(t) - f(a) - m(t-a)}{t-a}, \quad t \neq a.$$

ε stetig in Punkt a mit $\varepsilon(a) = 0$

⟺ $\lim_{t\to a} \varepsilon(t) = 0$

(iii) ⟺ (iv) : setze

$$\boxed{\varphi(t) = m + \varepsilon(t)} :$$

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a)$$

$$= f(a) + m(t-a) + \varepsilon(t)(t-a)$$

Bemerkung: f diffbar in a, dann auch stetig.

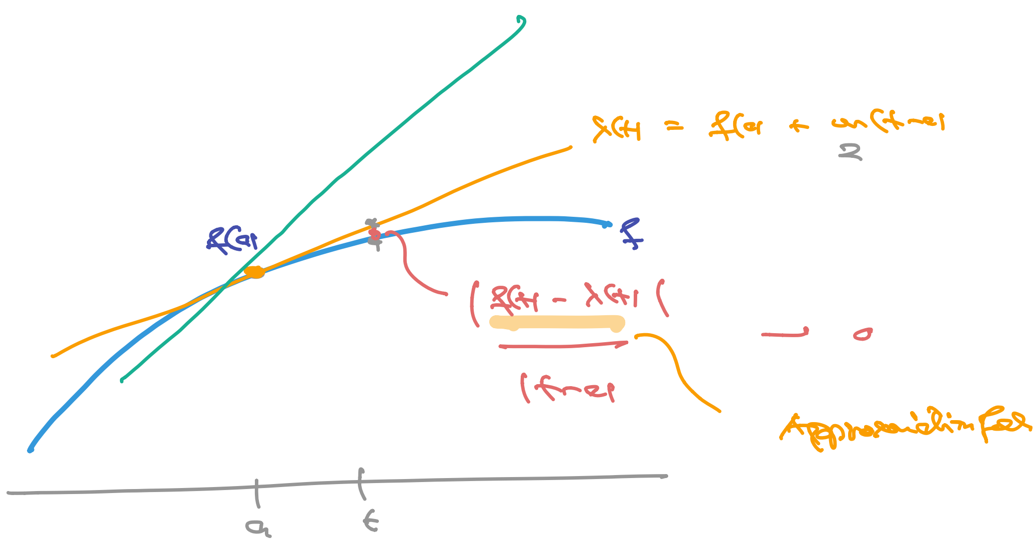
$$\boxed{f(t) = \underbrace{f(a) + m(t-a)} + \varepsilon(t)(t-a)}$$

$$\lim_{t\to a} \varepsilon(t) = 0$$

$$\lambda : \quad t \mapsto \lambda(t) = f(a) + m(t-a)$$

Also:

$$\frac{f(t) - \lambda(t)}{t-a} = \varepsilon(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0$$



Also: f ist bestapproximierbar genau dann an der Stelle $(a, f(a))$ an dem Graph von f:

$$\left| \frac{f(t) - f(a)}{t-a} \right| \to 0 \quad , \text{ für } t \to a.$$

Die Grenze zeigt Linearität von f im Punkt a, der Graph ist eine Tangente an f im Punkt a.

Beispiele:

1. Jede Konstante Fkt. $f \mapsto f(t) = c$ ist diffb. in jedem Punkt, und

$$f'(a) = 0.$$

2. Affine Funktion:

$$\alpha: t \mapsto \alpha(t) = mt + b$$

In jedem Punkt:

$$\boxed{\alpha'(a) = m}:$$

$$\frac{\alpha(a+h) - \alpha(a)}{h} = \frac{(m(a+h)+b) - (ma+b)}{h}$$

$$= \frac{mh}{h} = m, \quad h \neq 0.$$

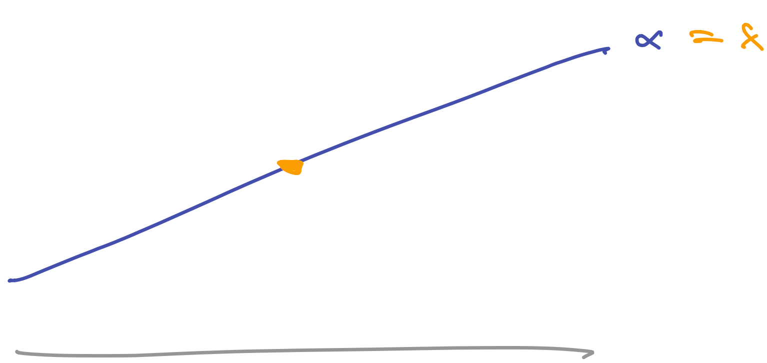
Linearisierung im Punkt a:

$$\lambda(t) = \alpha(a) + m(t-a)$$

$$= ma + b + mt - ma$$

$$= mt + b$$

$$= \alpha(t).$$



3. Wurzelfunktion: $t \mapsto \sqrt{t}$, $t \geq 0$.

$t > 0$:

$$\frac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h} = \frac{(t+h)-t}{h\cdot\left(\sqrt{t+h}+\sqrt{t}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{t+h}+\sqrt{t}\right)}$$

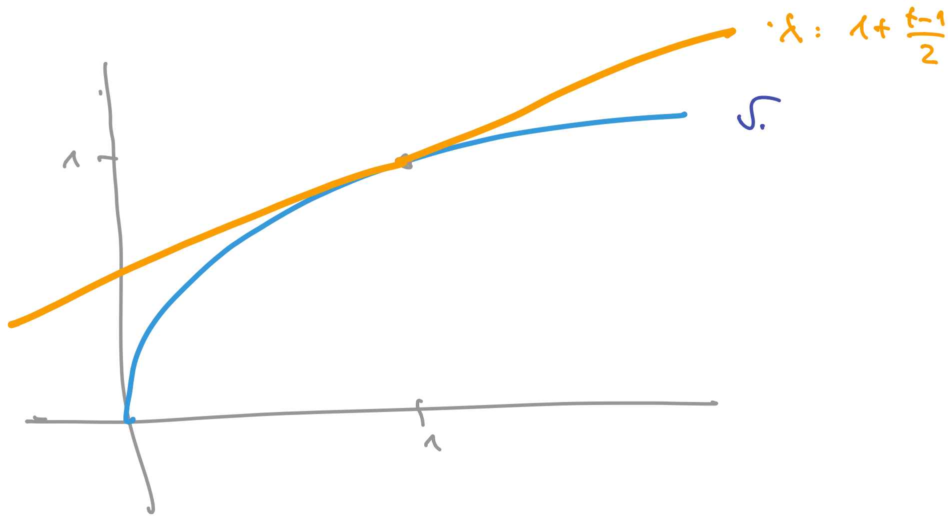
$$\longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad h \to 0, \quad t > 0$$

Also:

$$(\sqrt{t})' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

Linearisierung bei $a = 1$:

$$t \mapsto \underbrace{1}_{\sqrt{1}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{(\sqrt{t})'\big|_{t=1}}(t-1).$$



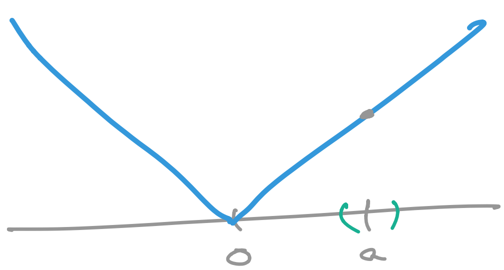
Bei $t=0$ ist $\sqrt{\cdot}$ nicht diffbar:

$$\frac{\sqrt{t}-\sqrt{0}}{t-0} = \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \longrightarrow \infty$$

für $t \searrow 0$

4. Betragsfunktion: $t \mapsto |t|$

ist bei $t=0$ nicht diffbar.



Diffbar bei $t \neq 0$. $\square$

Bizonyítás: Használt:

$$\boxed{f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a)}, \quad \text{ahol } \varphi \text{ folytonos } a\text{-ban.}$$

Ekkor $\varphi(a) = f'(a)$.

Ha g deriválható:

$$\boxed{g(t) = g(a) + \psi(t)(t-a)}$$

Ekkor

$$(fg)(t) = f(t)\cdot g(t)$$
$$= f(a)g(a) + \big(f(a)\psi(t) + \varphi(t)g(a)\big)(t-a) + \varphi(t)\psi(t)(t-a)^2$$

$$= (fg)(a) + \Big(\underbrace{f(a)\psi(t) + \varphi(t)g(a) + \varphi(t)\psi(t)(t-a)}_{\text{folytonos } t=a}\Big)(t-a)$$

$$= \text{konst} + (\ )(t-a)$$

Így: $(fg)'(a) = (\ )\big|_{t=a} = f(a)\psi(a) + \varphi(a)g(a)$, ahol $\psi(a) = g'(a)$, $\varphi(a) = f'(a)$

$$= f(a)g'(a) + f'(a)g(a).$$

<u>Satz:</u> Für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$(f^n)' = n f^{n-1},$$

wobei $f \neq 0$ für $n \leq 0$.

<u>Beweis:</u> Für $n=0$: $f^0 = 1$ $(f \neq 0)$

Also: $(f^0)' = 0 = \left(n f^{n-1}\right)\Big|_{n=0}$ ✓

Für $n=1$: $f^1 = f$:

$$(f^1)' = 1 = \left(n f^{n-1}\right)_{n=1}.$$

Für $n > 1$ Induktion: Sei $(f^n)' = n f^{n-1}$:

$$(f^{n+1})' = (f \cdot f^n)'$$

$$\underset{PR}{=} (f)' f^n + f \cdot (f^n)'$$

$$= 1 \cdot f^n + f \cdot n f^{n-1}$$

$$= f^n + n f^n$$

$$= (n+1) f^n.$$ ✓

Für $n<0$: Quotientenregel:

$$(t^n)' = \left(\frac{1}{t^{-n}}\right)'$$

$$= -\frac{1\cdot(t^{-n})'}{(t^{-n})^2}$$

$$= -\frac{(-n)\cdot t^{-n-1}}{t^{-2n}}$$

$$= n\,t^{n-1}, \qquad n<0.$$

Beispiel: Polynom:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (a_k t^k)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (t^k)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k a_k \cdot t^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}.$$

Beweis: $\qquad b = f(a)$:

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a) \qquad \varphi(a) = f'(a)$$

$$g(s) = g(b) + \psi(s)(s-b) \qquad \psi(b) = g'(b)$$

Setze $\quad b = f(a), \quad s = f(t)$:

$$f(t) - f(a) = s - b = \varphi(t)(t-a)$$

und

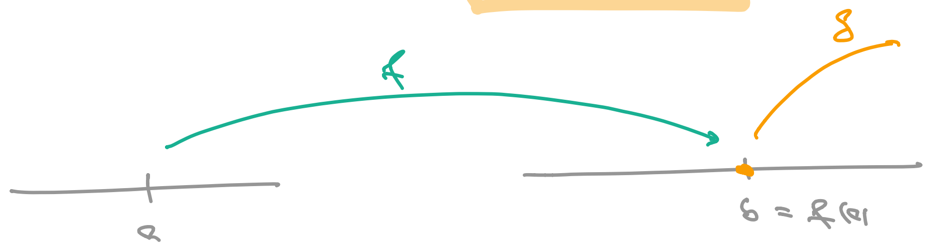
$$\begin{aligned}
(g\circ f)(t) &= g(f(t)) \\
&= g(s) \\
&= g(b) + \psi(s)(s-b) \\
&= (g\circ f)(a) + \psi(f(t))\,\varphi(t)(t-a) \\
&= (g\circ f)(a) + \Big(\underbrace{\psi(f(t))\cdot\varphi(t)}_{\text{stetig bei } t=a}\Big)(t-a)
\end{aligned}$$

Wert $\psi(b)\cdot\varphi(a)$

$$= g'(b)\cdot f'(a).$$

Also: $\quad (g\circ f)'(a) = g'(b)\cdot f'(a), \quad b = f(a).$ $\square$

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$



$f'(a)$ $\qquad\qquad$ $g'(b) = g'(f(a))$

Exemple : $\quad f(t) = \sqrt{1+t^2}\,, \quad t\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} g : x \mapsto \sqrt{x} \\ h : t \mapsto 1+t^2 \end{array}\right\} \quad f = g\circ h$$

Alors :

$$f'(t) = g'(x)\Big|_{x=h(t)} \cdot h'(t)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=h(t)} \cdot 2t$$

$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,. \qquad \blacksquare$$

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t-a),$$

$$\varphi(a) = f'(a) \neq 0.$$

$f'(a) = \varphi(a) \neq 0$:

$$\varphi(t) \neq 0, \quad t \in U_\delta(a)$$

Auflösen nach t:

$$t = a + \frac{f(t) - f(a)}{\varphi(t)}$$

$f(t) = s$
$f(a) = b$
$f^{-1} = g$
$t = g(s)$

Also:

$$\boxed{g(s) = g(b) + \frac{s-b}{\varphi(g(s))}}$$

Teil: $\dfrac{1}{\varphi(g(s))}$ stetig bei $s=b$

Also: g ist diffbar bei $s=b$, und

$$g'(b) = \frac{1}{\varphi(g(b))} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \quad \blacksquare$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] & b = f(a) \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

für $f'(a) \neq 0$.

Beweis: Wir haben

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

[illegible] [illegible] diff. Seite: Kettenregel:

$$(x)' = (f^{-1}(f(x)))'$$

Also:

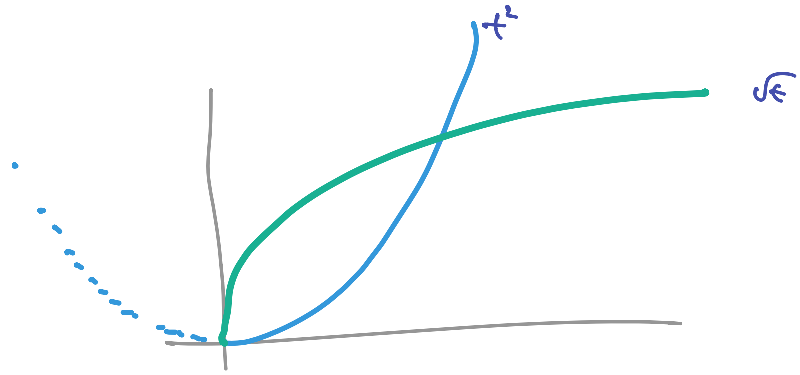
$$1 = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Also:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{falls } f'(x) \neq 0$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beispiel: $\quad f(t) = t^2, \quad t \geq 0$



$$g(t) = \sqrt{t} = f^{-1}(t)$$

$f'(t) = 2t > 0$ für $t > 0$

also ≥ 0 für $t \geq 0$.

Also: $g = \sqrt{\cdot}$ ist differenzierbar für $t > 0$, mit

$$g'(s) = \frac{1}{f'(g(s))} = \frac{1}{2t}\Big|_{t = g(s)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}}, \quad s > 0.$$