7.3 Funktionsgrenzwerte

Ist eine Funktion f in einem Punkt a ihres Definitionsbereichs stetig, so ist

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

für jede Folge (x_n) im Definitionsbereich von f, die gegen a konvergiert $_3$. Ein solcher Grenzwert kann aber auch dann existieren, wenn f im Punkt a gar nicht definiert oder dort unstetig ist.

▹▸ *Beispiel* Es ist $_{3.13}$

$$\frac{t^3-1}{t-1} = t^2 + t + 1.$$

Die links stehende Funktion ist bei $t = 1$ nicht definiert, die rechts stehende dagegen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Man kann daher erwarten, dass der links stehende Ausdruck für $t \to 1$ den Grenzwert 3 besitzt. ◂

Wir wollen solche Grenzwerte unabhängig von einem eventuell vorliegenden Funktionswert definieren, und das auch in solchen Punkten, wo die Funktion nur in einer Umgebung, aber nicht im Punkt selbst definiert ist. Dazu benötigen wir den Begriff des *Häufungspunktes* einer Menge.

Definition *Ein Punkt $a \in E$ heißt Häufungspunkt einer Menge $D \subset E$, wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte von D liegen.* ⋊

▹▸ A. Eine endliche Menge besitzt *keine* Häufungspunkte.

B. Die Menge $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ besitzt 0 als einzigen Häufungspunkt.

C. Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ besitzt jede reelle Zahl als Häufungspunkt.

D. Ist die Zahlenfolge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent mit Grenzwert a und sind unendlich viele Folgenglieder verschieden, so ist a der einzige Häufungspunkt der Menge $A = \{a_n : n \geqslant 1\}$. Gibt es dagegen nur endlich viele verschiedene Folgenglieder, so hat A endlich und hat keinen Häufungspunkt. ◂

Definition *Sei $f : E \supset D \to F$ eine Abbildung und a ein Häufungspunkt von D. Dann heißt $w \in F$ der Grenzwert von f im Punkt a, geschrieben*

$$\lim_{x\to a} f(x) = w,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(\dot{U}_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(w), \tag{4}$$

wobei

$$\dot{U}_\delta(a) := U_\delta(a) \setminus \{a\} = \{x \in E : 0 < \|x-a\|_E < \delta\}$$

die punktierte δ-Umgebung des Punktes $a \in E$ bezeichnet. ⋊

Die Bedingung (4) ähnelt der Stetigkeitsbedingung in (3), nur wird hier die Funktion f an der Stelle a *nicht* ausgewertet. Sie muss daher auch nicht in a definiert sein. Andererseits ist für einen Häufunspunkt a die Menge $\dot{U}_\delta(a) \cap D$ für alle $\delta > 0$ nicht leer. Andernfalls wäre Bedingung (4) automatisch erfüllt.

21 **Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte** *Sei $f : E \supset D \to F$ und a ein Häufungspunkt von D. Dann gilt*

$$\lim_{x \to a} f(x) = w$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = w$$

für jede gegen a konvergierende Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist praktisch identisch mit dem Beweis des Folgenkriteriums für Stetigkeit in einem Punkt $_3$. Wir wiederholen ihn hier der Vollständigkeit halber.

⇒ Gilt $\lim_{x \to a} f(x) = w$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass (??) gilt. Ist (x_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a, so existiert zu diesem δ wiederum ein $N \geqslant 1$, so dass $x_n \in U_\delta(a)$ für alle $n \geqslant N$. Es gilt sogar

$$x_n \in \dot{U}_\delta(a) \cap D, \qquad n \geqslant N.$$

da die Folgenglieder ja in $D \setminus \{a\}$ liegen. Also gilt

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(w), \qquad n \geqslant N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ solch ein N existiert, gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = w$.

⇐ Angenommen, es gilt *nicht* $\lim_{x \to a} f(x) = w$. Da *jede* punktierte Umgebung von a Punkte aus D enthält, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass in jeder punktierten $1/n$-Umgebung von a ein $x_n \in D$ existiert mit

$$f(x_n) \notin U_\varepsilon(w).$$

Diese x_n bilden eine konvergente Folge in $D \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a, für die $f(x_n)$ sicher *nicht* gegen w konvergiert. Wir erhalten damit einen Widerspruch. ⟩⟩⟩⟩

Aus diesem Kriterium ergibt sich die folgende Charakterisierung der Stetigkeit, die oft auch als deren Definition dient.

22 **Korollar** *Sei $D \subset E$ und $a \in D$ Häufungspunkt von D. Dann ist $f : D \to F$ stetig in a genau dann, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.* ⋊

Bemerkung Jeder Punkt einer Menge D ist entweder ein Häufungspunkt oder ein *isolierter Punkt* von D. In letzterem Fall existiert also eine Umgebung von a, die keine weiteren Punkte von D enthält. In einem isolierten Punkt ist *jede Funktion* stetig A-4. ⊸

Mit dem Folgenkriterium 21 erhalten wir Grenzwertsätze für Funktionen aus den Grenzwertsätzen für Folgen 5.7. Der Beweis der folgenden Ergebnisse ist als Übung überlassen.

23 **Grenzwertsätze** *Sei a ein Häufungspunkt von D. Besitzen die Funktionen $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt a die Grenzwerte*

$$\lim_{x\to a} f(x) = u, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = v,$$

so gilt auch

(i) $\lim_{x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda u + \mu v$ *für* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(ii) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = uv$,

(iii) $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = u/v$, *falls* $v \neq 0$.

(iv) *Gilt außerdem $f \leqslant g$ in einer punktierten Umgebung von a, so ist $u \leqslant v$.*

Hierbei gilt (i) auch für Abbildungen in einen beliebigen Banachraum F. ⋊

24 ⊳ A. Führt man die Polynomdivision aus, so ist

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^3 - 1}{t - 1} = \lim_{t\to 1}(t^2 + t + 1) = 3.$$

B. Da die Sinusfunktion beschränkt ist, gilt $\lim_{t\to 0} t \sin t^{-1} = 0$.

C. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ dagegen hat in 0 keinen Grenzwert.

D. Die Dirichletfunktion 2 δ besitzt in keinem einzigen Punkt der reellen Gerade einen Grenzwert. ◅

▪ Einseitige Grenzwerte

Auf der reellen Geraden kann man noch unterscheiden, ob man sich einem Punkt von links oder von rechts nähert. Für eine Funktion $f \colon D \to F$ mit $D \subset \mathbb{R}$ erklärt man deshalb noch den *linksseitigen Grenzwert*

$$f_-(a) := \lim_{x\nearrow a} f(x) := \lim_{x\to a}(f \mid D_a^-)(x), \qquad D_a^- := D \cap (-\infty, a),$$

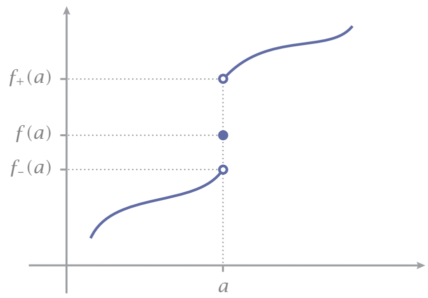
und den *rechtsseitigen Grenzwert*

$$f_+(a) := \lim_{x\searrow a} f(x) := \lim_{x\to a}(f \mid D_a^+)(x), \qquad D_a^+ := D \cap (a, \infty),$$

vorausgesetzt, a ist ein Häufungswert von D_a^- respektive D_a^+. Man betrachtet also nur Argumente links oder rechts des Punktes a. Andere für diese Grenzwerte übliche Bezeichnungen sind $f(a-)$ und $f(a+)$.

Abb 11

Einseitige Grenzwerte einer monotonen Funktion



A. Für die Wurzelfunktion gilt

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} = 0.$$

B. Für die Gaußklammer oder Ganzzahlfunktion $_{3.18}$ $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \searrow m} [x] = m = [m], \qquad \lim_{x \nearrow m} [x] = m - 1.$$

Man sagt dazu auch, $[\cdot]$ ist in m *rechtsseitig stetig*.

C. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ besitzt in 0 weder einen links- noch einen rechtsseitigen Grenzwert.

Bemerkung Der *Grenzwert* von f in a existiert genau dann, wenn beide einseitigen Grenzwerte existieren und übereinstimmen:

$$\lim_{x \to a} f(x) = w \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) = w = \lim_{x \searrow a} f(x).$$

Einseitige Grenzwerte existieren insbesondere immer für *monotone* Funktionen, ohne jede Stetigkeitsannahme. Das macht sie besonders nützlich.

25 **Satz** *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, so existieren in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f. Genauer gilt*

$$\sup_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \leqslant f(a) \leqslant f_+(a) = \inf_{(a,\infty)} f$$

im Fall einer monoton steigenden Funktion, und

$$\inf_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \geqslant f(a) \geqslant f_+(a) = \sup_{(a,\infty)} f$$

im Fall einer monoton fallenden Funktion.

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei zum Beispiel f monoton steigend und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist f auf $(-\infty, a)$ nach oben durch $f(a)$ beschränkt, und es gilt

$$\lambda \coloneqq \sup_{(-\infty,a)} f \leqslant f(a).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ ein $t_\varepsilon < a$ mit

$$\lambda - \varepsilon < f(t_\varepsilon) \leqslant \lambda.$$

Aufgrund der Monotonie von f gilt dann aber auch

$$\lambda - \varepsilon < f(t) \leqslant \lambda, \qquad t_\varepsilon < t < a.$$

Das aber bedeutet, dass

$$f_-(a) = \lim_{t \nearrow a} f(t) = \lambda = \sup_{(-\infty,a)} f.$$

Entsprechend argumentiert man für den rechtsseitigen Grenzwert. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Eine monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in a genau dann, wenn $f_-(a) = f_+(a)$. Andernfalls bezeichnet man

$$\sigma_f(a) = |f_+(a) - f_-(a)|$$

als die *Sprunghöhe* von f in a. ⊸

▪ Uneigentliche Grenzwerte

Für Funktionen auf der reellen Geraden sind auch *uneigentliche Grenzwerte* bei ∞ und $-\infty$ erklärt. Wir müssen dazu nur entsprechende Umgebungen wie zuvor $_{5.6}$ erklären, also

$$U_\delta(\infty) = (\delta^{-1}, \infty), \qquad U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta^{-1}), \qquad \delta > 0,$$

welche in diesem Fall auch gleichzeitig die punktierten Umgebungen sind.

So ist zum Beispiel ∞ ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$, wenn D nach oben unbeschränkt ist, also $\sup D = \infty$ gilt. Es gilt dann

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = w,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(t) - w| < \varepsilon, \qquad t \in U_\delta(\infty) \cap D.$$

Und dies gilt genau dann, wenn für jede Folge (t_n) in D mit $t_n \to \infty$ auch

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = w.$$

Entsprechend sind uneigentliche Grenzwerte für die Werte von Funktionen erklärt, indem in (4) die Umgebungen von w entsprechend gewählt werden.

7.22

A. $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t} = 0.$

B. $\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} = \infty, \qquad \lim_{t\nearrow 0} \frac{1}{t} = -\infty.$

C. Für jedes Polynom p mit $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + .. + a_0$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} p(t) = (-1)^n \cdot \infty.$$

D. Betrachte eine reelle *Folge* (a_n) als Funktion $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(n) = a_n$. Ist die Folge konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{t\to\infty} \alpha(t).$$