15. Vorlesung 23.12.20

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \quad \text{für jede Folge } (x_n) \text{ mit } x_n \to a.$$

Bsp:

$$\frac{t^3 - 1}{t - 1} \quad \text{def auf } \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$= t^2 + t + 1$$

Also:

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^3 - 1}{t - 1} = \lim_{t \to 1} (t^2 + t + 1) = 3$$

$$= (t^3)' \Big|_{t=1} .$$

" $\lim_{x \to a} f(x)$ "

Von nun an E, F normierte Räume,

$f: E \supset D \longrightarrow F$.

a ist Häufungspunkt von D

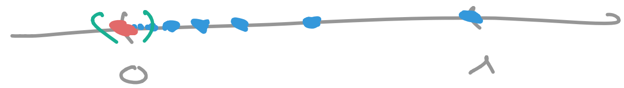
Erinnerung: $U_\varepsilon(a) = \{x \in E : \|x-a\|_E < \varepsilon\}$

Ist a Hp von D, dann ex. Folge (x_n) in D mit

$x_n \longrightarrow a$.

Bsp: 1. Eine endliche Menge hat keinen Hp.

2. $\mathcal{M} = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R}$



0 ist Hp von $\mathcal{M}$.

Aber kein Punkt von $\mathcal{M}$ selbst ist Hp von $\mathcal{M}$:

3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: Jedes $x \in \mathbb{R}$ Hp von $\mathbb{Q}$.

4. Sei (a_n) konvergente Folge,

$a = \lim a_n$,

$\mathcal{A} = \{ a_n : n \geq 1 \}$

Ist a Hp von $\mathcal{A}$?

Kommt darauf an:

Ja, wenn $\# \mathcal{A} = \infty$.

Sei $f : E \supset D \to F$,

Sei $a \in E$ Hp von D.

(nicht notw. $a \in D$!).

Dann heißt $\omega \in F$ Grenzwert von f im Punkt a:

$$\omega = \lim_{x \to a} f(x),$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ ex.:

$$f(\dot{U}_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(\omega),$$

wobei

$$\dot{U}_\delta(a) := U_\delta(a) \setminus \{a\}$$

$$= \{x \in E : 0 < \|x-a\|_E < \delta\}.$$

Folgenkriterium:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

für jede Folge $(x_n)_n$ mit

$x_n \in D$,

$x_n \to a$.

$f : E \supset D \to F$,

$a \in D$ mit a Hp von D.

Dann ist f stetig in a genau

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Bem: Wenn also $a \in D$ und a kein Hp von D, dann ist a ein isolierter Punkt:

Bsp: 1.

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^3-1}{t-1} = \lim_{t \to 1} (t^2+t+1) = 3.$$

2.

$$\lim_{t \to 0} \underbrace{t}_{NF} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{BF} = 0$$

3.

$$\lim_{t \to 0} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$ ex. nicht.

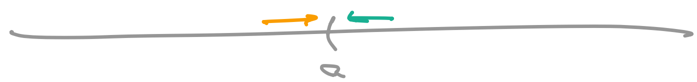
4. Dirichlet-f. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Stet. in keinem Punkt des Definitionsbereichs.

Jetzt eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$$



Linksseitige Grenzwert in a:

$$D \cap (-\infty, a) =: D_a^-$$

a sei HP von D_a^-:

Dann:

$$f_-(a) := \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(f|_{D_a^-} \right)(x)$$

$$=: f(a-)$$

rechtsseitig:

$$D \cap (a, \infty) =: D_a^+$$

a sei HP von D_a^+

$$=: f(a+)$$

$$f_+(a) := \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(f|_{D_a^+} \right)(x)$$

Bsp.:

1.

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \downarrow 0} \sqrt{x} = 0.$$

2. $[\cdot]$ Gaußklammer: $[x]$ ...

$n \in \mathbb{Z}$

rechtsseitig stetig.

$$\lim_{x \downarrow n} [x] = n = [n]$$

$$\lim_{x \uparrow n} [x] = n-1 < [n].$$

3. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

besitzt keine einseitigen Lim bei $x=0$.

Ist f monoton steigend:

$$\sup_{(-\infty,a)} f = f_-(a) \le f(a) \le f_+(a) = \inf_{(a,\infty)} f$$

Sei f monoton steigend, $a \in \mathbb{R}$.
Dann ist f auf $(-\infty,a)$ nach oben durch $f(a)$ beschränkt:

$$\lambda := \sup_{(-\infty,a)} f \le f(a).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein $t_\varepsilon < a$ mit

$$\lambda - \varepsilon < f(t_\varepsilon) \le \lambda.$$

Damit ex. (t_n) in $(-\infty,a)$ mit

$$t_n \nearrow a \qquad = f_-(a).$$

$$f(t_n) \longrightarrow \lambda = \sup_{(-\infty,a)} f = \lim_{t\nearrow a} f(t)$$

Prop: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton,

falls $f_-(x) = f_+(x)$, so ist f in Punkt x stetig.

Falls $\neq$, so

$$|f_-(x) - f_+(x)| = \sigma_f(x)$$

Sprunghöhe von f bei x.

Beispiel: ÜA: "$f(t) = \sum\limits_{n:\, x_n < t} a_n$".

$f : \mathbb{R} \supset D \longrightarrow F$

$\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ -\infty}} f(t)$ $-$

Umgebung von $\pm\infty$:

$U_\delta(\infty) := \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right), \quad \delta > 0$

$U_\delta(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right), \quad \delta > 0$

punktierte Umgebung von $\pm\infty$.

$-\infty$ ist HP von D genau, falls $\sup D = \infty$ $-\infty$

Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \omega \in F,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt:

$$\underbrace{|f(t) - \omega| < \varepsilon}_{f(t)\, \in\, U_\varepsilon(\omega)}, \quad t \in U_\delta(\infty) \cap D$$

Das gilt genau dann, wenn für jede Folge (t_n) in D mit $t_n \to \infty$:

$f(t_n) \to \omega$.

Bsp.: 1.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} = 0 , \quad \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{t} = 0 .$$

2. $$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} = \infty , \quad \lim_{t \nearrow 0} \frac{1}{t} = -\infty .$$

3. Polynom $p(t) = 1 \cdot t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots$

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty$$

$$\lim_{t \to -\infty} p(t) = (-1)^n \cdot \infty .$$

4. Reelle Folge (a_n), betrachte als

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$a_n = \alpha(n) .$$

Ist (a_n) konvergent, dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{t \to \infty} \alpha(t) .$$