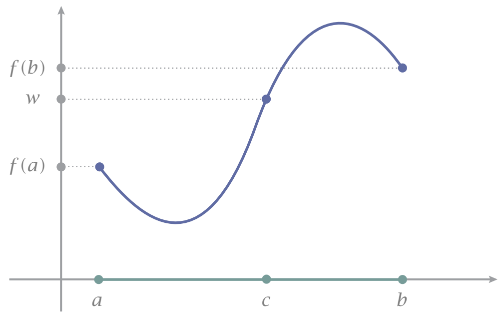
Abb 6

Zwischenwertsatz von Bolzano



7.2 Stetige Funktionen auf Intervallen

Wir betrachten nun einige fundamentale Eigenschaften stetiger reellwertiger Funktionen auf einem *Intervall*, also Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dazu zählen der Zwischenwertsatz $_{14}$, der Satz über Umkehrfunktionen $_{17}$, und der Satz vom Minimum & Maximum $_{19}$.

▪ Zwischenwerte

12 **Zwischenwertsatz von Bolzano** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann existiert zu jeder reellen Zahl w zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein Punkt $c \in (a,b)$ mit $f(c) = w$.* ⋊

Bemerkung Der Zwischenwertsatz gilt offensichtlich *nicht*, wenn f *nicht stetig* oder der Definitionsbereich *kein Intervall* ist – siehe Abbildung 7. ⊸

⟪⟪ Wir können annehmen, dass $f(a) < w < f(b)$. Andernfalls gehen wir zur Funktion $-f$ und dem Zwischenwert $-w$ über und wenden den folgenden Beweis darauf an.

Betrachte die Menge

$$A \coloneqq \{t \in [a,b] : f(t) < w\} \subset [a,b].$$

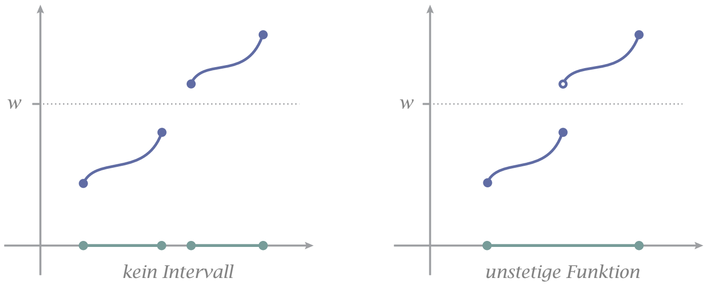
Diese Menge ist nicht leer, denn $a \in A$. Außerdem ist sie beschränkt. Somit existiert $c = \sup A$, und offensichtlich ist $c \in [a,b]$. Wir zeigen, dass $f(c) = w$.

Aufgrund des Approximationssatzes $_{5.28}$ existiert eine Folge (t_n) in A mit $\lim_{n\to\infty} t_n = c$. Mit der Stetigkeit von f und $f(t_n) < w$ für alle n folgt $_{5.9}$

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(c) \leqslant w.$$

Wegen $w < f(b)$ ist $c \neq b$ und somit $c < b$. Wäre nun $f(c) < w$, so wäre f aus Stetigkeitsgründen auch in einer kleinen, ganz in $[a,b]$ enthaltenen Umgebung

Abb 7 Zwischenwertsatz von Bolzano nicht anwendbar



von c kleiner als w. Es gäbe also ein $d \in [a,b]$ mit

$$c < d < b, \qquad f(d) < w.$$

Dann aber wäre $d \in A$, im Widerspruch zur Definition von c als dem Supremum von A. Also gilt nicht $f(c) < w$, sondern $f(c) = w$.

Ein wichtiger Spezialfall des Zwischenwertsatzes liefert die Existenz einer *Nullstelle* einer Funktion, also eines Punktes x mit $f(x) = 0$.

13 **Nullstellensatz** *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a)f(b) < 0$, so besitzt f in (a,b) mindestens eine Nullstelle.*

Entweder ist $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. In beiden Fällen können wir den Satz von Bolzano $_{12}$ mit $w = 0$ anwenden.

Beispiel Jedes reelle Polynom p ungeraden Grades,

$$p(t) = t^{2n+1} + a_{2n}t^{2n} + .. + a_1 t + a_0,$$

besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Denn ein solches Polynom definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, die für hinreichend große t positiv und hinreichend kleine t negativ wird. Die Existenz einer Nullstelle folgt damit aus dem Nullstellensatz $_{13}$.

Dies gilt natürlich nicht für Polynome geraden Grades. Das Polynom $t^2 + 1$ beispielsweise besitzt keine reelle Nullstelle.

Der Zwischenwertsatz von Bolzano lässt sich noch verallgemeiner formulieren. Sei dazu

$$\sup_I f \coloneqq \sup f(I) = \sup \{ f(t) : t \in I \},$$

und analog $\inf_I f$. Diese dürfen auch den Wert ∞ respektive $-\infty$ annehmen.

14 **Allgemeiner Zwischenwertsatz** *Sei I ein beliebiges Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $\inf_I f$ und $\sup_I f$ mindestens einmal an.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\inf_I f < w < \sup_I f$. Dann gibt es aufgrund des Approximationssatzes $_{2.12}$ Punkte $a \in I$ und $b \in I$ mit $f(a) < w < f(b)$. Wenden wir den Satz von Bolzano $_{12}$ auf die Einschränkung von f auf das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten a und b an, so erhalten wir die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Alle drei Zwischenwertsätze sind tatsächlich *äquivalent:* aus jedem lassen sich die beiden anderen ableiten $_{A\text{-}8}$. ⊸

Geometrisch betrachtet ist der allgemeine Zwischenwertsatz äquivalent zu folgender Formulierung.

15 **Intervallabbildungssatz** *Stetige Bilder von Intervallen sind wieder Intervalle. Das heißt, ist I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Besteht $f(I)$ nur aus einem Punkt, so sind wir fertig. Gehören zwei Punkte $u < v$ zu $f(I)$, so nimmt f also die Werte u und v an. Dann nimmt f aufgrund des Zwischenwertsatzes $_{14}$ auf I auch jeden dazwischen liegenden Wert an. Es gilt also auch $[u, v] \subset f(I)$. Somit enthält $f(I)$ mit je zwei Punkten auch alle dazwischen liegenden Punkte. *Per definitionem* ist $f(I)$ damit ein Intervall. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Umkehrfunktionen

Eine *beliebige Funktion* $f: I \to \mathbb{R}$ ist auf ihrer Bildmenge umkehrbar, wenn sie injektiv ist. Dies kann allerdings nur schwer zu verifizieren sein. Ein spezifischeres Kriterium gibt es für den allgemeinen Fall aber nicht.

Anders ist die Situation, wenn f stetig ist. Dann reduziert sich das Problem auf die Frage, ob f streng monoton ist.

16 **Definition** *Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ heißt monoton steigend, falls*

$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) \leqslant f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Sie heißt streng monoton steigend, falls sogar

$$u < v \quad \Rightarrow \quad f(u) < f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Analog sind monoton fallende und streng monoton fallende Funktionen definiert. Schließlich heißt eine Funktion (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton steigt oder fällt. ⋊

▷ A. Jede konstante Funktionen $t \mapsto c$ ist auf $\mathbb{R}$ monoton steigend *und* monoton fallend, aber natürlich nicht streng monoton.

B. Die Identitätsfunktion $t \mapsto t$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

C. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend.

D. Die Cosinusfunktion $_{9.3}$ ist auf den abgeschlossenen Intervallen

$$I_n^- = [(2n-1)\pi, 2n\pi], \qquad I_n^+ = [2n\pi, (2n+1)\pi], \qquad n \in \mathbb{Z},$$

streng monoton steigend respektive streng monoton fallend. ◁

Eine auf einem Intervall I streng monotone Funktion f ist offensichtlich injektiv und damit auf ihrer Bildmenge $f(I)$ umkehrbar $_{\text{A-22}}$. Ist f außerdem *stetig*, so ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall $_{15}$. Wir zeigen jetzt, dass f^{-1} auf diesem Intervall auch wieder stetig und streng monoton ist. Die Funktion f^{-1} hat also dieselben Eigenschaften wie f.

17 **Satz über stetige Umkehrfunktionen** *Sei I ein Intervall. Ist $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, so gilt mit $J = f(I)$:*

(i) *$f: I \to J$ ist bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to I$, die im selben Sinn streng monoton ist.*

(ii) *J ist wieder ein Intervall.*

(iii) *f^{-1} ist ebenfalls stetig.* ⋊

Bemerkung Dieser Satz gilt für *jedes* Intervall, also beispielsweise auch für $I = [0, \infty)$ oder $I = \mathbb{R}$. ⊸

⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten den Fall, dass $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton steigt.

(i) Offensichtlich ist f injektiv und auf der Bildmenge $J = f(I)$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to I$ existiert somit auf jeden Fall. Ferner gilt

$$t_1 \geqslant t_2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = f(t_1) \geqslant s_2 = f(t_2).$$

Die Kontraposition hiervon ist

$$s_1 < s_2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = f^{-1}(s_1) < t_2 = f^{-1}(s_2).$$

Also ist auch f^{-1} streng monoton steigend.

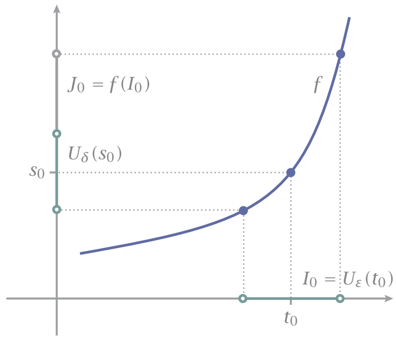
(ii) Ist f stetig, so ist J aufgrund des Intervallabbildungssatzes $_{15}$ ebenfalls ein Intervall.

(iii) Sei zunächst t_0 kein Randpunkt von I. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gilt $I_0 = U_\varepsilon(t_0) = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset I$. Aufgrund der Monotonie von f gilt

$$J_0 \coloneqq f(I_0) = (f(t_0 - \varepsilon), f(t_0 + \varepsilon)) \subset J,$$

Abb 8

Zum Satz über stetige Umkehrfunktionen



und es ist $s_0 = f(t_0) \in J_0$. Wählen wir jetzt zum Beispiel

$$\delta \coloneqq \min\{s_0 - f(t_0 - \varepsilon), f(t_0 + \varepsilon) - s_0\},$$

so ist $\delta > 0$ und $U_\delta(s_0) \subset J_0$. Ferner gilt

$$f^{-1}(U_\delta(s_0)) \subset f^{-1}(J_0) = I_0 = U_\varepsilon(t_0) = U_\varepsilon(f^{-1}(s_0)).$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, ist f^{-1} in s_0 stetig.

Für Randpunkte und streng monoton fallende Funktionen gelten entsprechende Argumente. ⟩⟩⟩⟩⟩

Eine Anwendung dieses Satzes liefert uns – *endlich* – die Existenz der n-ten Wurzel als stetige Funktion auf der Halbgeraden $[0, \infty)$.

18 **Wurzelsatz** *Für jedes $n \geqslant 2$ besitzt die Funktion $t \mapsto t^n$ auf $[0,\infty)$ eine streng monoton steigende, stetige Umkehrfunktion*

$$[0,\infty) \to [0,\infty), \quad t \mapsto \sqrt[n]{t},$$

genannt die n-te Wurzelfunktion. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $n \geqslant 2$. Auf $[0,\infty)$ ist die Funktion $f\colon t \mapsto t^n$ als Polynom stetig und unbeschränkt, und damit $f([0,\infty)) = [0,\infty)$. Außerdem ist sie streng monoton steigend, da 3.13

$$u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + .. + v^{n-1}) > 0, \qquad u > v \geqslant 0.$$

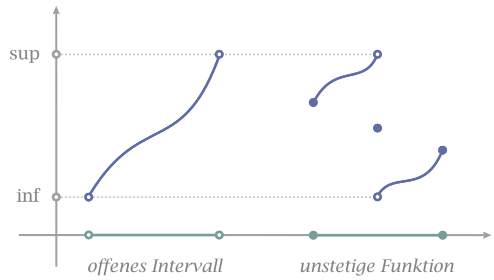
Alle Aussagen folgen daher aus dem vorangehenden Satz. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Minimum & Maximum

Für eine beliebige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ existiert immer $\sup_D f$ auf der erweiterten Zahlengeraden. Dies kann auch den Wert ∞ annehmen. Es muss auch

Abb 9

Kein Minimum oder Maximum



keinen Punkt in D geben, an dem f diesen Wert annimmt, auch wenn f beschränkt ist. Einfache Beispiele sind in Abbildung 9 skizziert.

Gibt es dagegen einen Punkt $c \in D$ mit $f(c) = \sup_D f$, so spricht man von einem *Maximum* und sagt, f *nimmt sein Supremum im Punkt c an* [1]. Man schreibt

$$\sup_D f = \max_D f = f(c)$$

und nennt c selbst eine *Maximalstelle* von f. Ein Maximum ist in jedem Fall endlich. Entsprechend sind das *Minimum* $\min_D f$ und eine *Minimalstelle* erklärt.

Der folgende Satz sagt aus, dass dies immer für eine *stetige* Funktion auf einem *abgeschlossenen* Intervall der Fall ist.

19 **Satz vom Minimum & Maximum** *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte $u, v \in [a,b]$ mit*

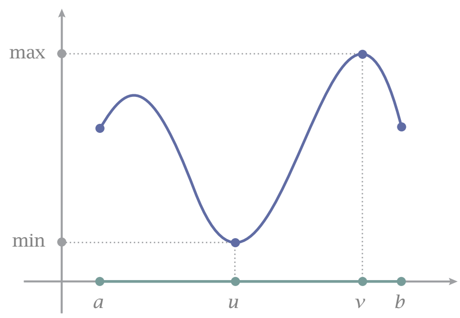
$$f(u) \leqslant f(t) \leqslant f(v), \qquad t \in [a,b].$$

Insbesondere gilt also

[1] Gebräuchlicher ist die nicht ganz korrekte Formulierung, f nehme sein *Maximum* an.

Abb 10

Satz vom Minimum & Maximum



$$f(u) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f, \qquad f(v) = \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f. \qquad \rtimes$$

⟪⟪ Sei $m \coloneqq \inf_{[a,b]} f$, wobei im Moment auch $-\infty$ zugelassen ist. Aufgrund des erweiterten Approximationssatzes 5.28 existiert eine Folge (t_n) in $[a,b]$ mit $f(t_n) \to m$. Da diese Folge beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 5.17 eine konvergente Teilfolge (t_{n_k}) mit Grenzwert u. Da $a \leqslant t_n \leqslant b$ für alle n, ist auch $a \leqslant u \leqslant b$. Es gilt also

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = u \in [a,b].$$

Aufgrund der Stetigkeit von f ist

$$\lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = f(u).$$

Da aber $f(t_{n_k})$ Teilfolge der konvergenten Folge $f(t_n)$ ist, erhalten wir insgesamt

$$f(u) = \lim_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = m = \inf_{[a,b]} f.$$

Insbesondere ist m *endlich.* – Entsprechend für das Supremum. ⟫⟫

Damit erhalten wir auch eine Verschärfung des Intervallabbildungssatzes 15 für abgeschlossene Intervalle.

20 **Korollar** *Eine stetige reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist beschränkt und bildet dieses wieder auf ein abgeschlossenes Intervall ab.* $\rtimes$

Für die anderen Intervalltypen gilt dieses Korollar nicht. Eine stetige Funktion kann auf einem offenen Intervall unbeschränkt sein, oder das Bild kann ein abgeschlossenes Intervall sein.